1. Grundrechnungsarten

Wir beginnen bei den elementaren Regeln des Rechnens.

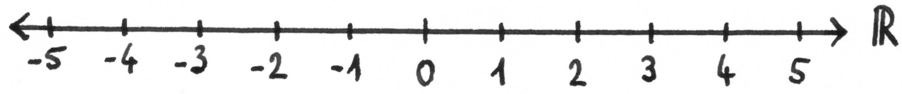
Addition & Subtraktion

algebraische Eigenschaften der Addition reeller Zahlen ($a, b, c \in \mathbb{R}$):

→ Kommutativität: $a + b = b + a$

→ Assoziativität: $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$

Zahlenstrahl:



„negative" Zahlen,

d.h. $|a| = -a$,

$a < 0$

„positive" Zahlen,

d.h. $|a| = a$,

$a > 0$

Der Betrag gibt immer eine positive Zahl.

Offenbar gilt: $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$.

Addition negativer Zahlen:

$$a + (-b) = a - b,$$
$$(-a) + b = b - a,$$
$$(-a) + (-b) = -(a + b)$$

Sonderrolle der Zahl Null:

$$a + 0 = a$$

Multiplikation

algebraische Eigenschaften der Multiplikation reeller Zahlen:

→ Kommutativität: $ab = ba$

→ Assoziativität: $a(bc) = (ab)c = abc$

→ Distributivität: $a(b+c) = ab + ac$

↳ „Ausmultiplizieren" und „Ausklammern"

↳ Produkte von Summen:

$$(a+b)\underbrace{(c+d)}_{f} = af + bf = a(c+d) + b(c+d)$$
$$= ac + ad + bc + bd$$

Multiplikation negativer Zahlen:

„+" mal „−" = „−"

„−" mal „−" = „+"

$(+a)(-b) = -(ab)$

$(-a)(+b) = -(ab)$

$(-a)(-b) = +(ab)$ ⟶ alternativ: $-a = (-1)a$

$\Rightarrow (a)(-b) = a(-1)b = (-1)ab,$

$(-a)(-b) = (-1)(-1)ab = ab$

binomische Formeln:

$(a+b)(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$(a-b)(a-b) = (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$(a+b)(a-b) = (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Sonderrolle der Zahl Null:

$a \cdot 0 = 0$

Division als Umkehrung der Multiplikation:

$a = bc \longrightarrow b = \frac{a}{c}$, es sei denn $c = 0$ (!)

beachte:

$\frac{0}{a} = 0$, denn $a \cdot 0 = 0$

$\frac{a}{0}$ nicht erklärt, da es keine Zahl gibt, die mit Null multipliziert a ergibt

$\frac{0}{0}$ unbestimmt, da jede Zahl mit Null multipliziert Null ergibt

Bruchrechnung

Ein Bruch besteht aus Zähler (oben) und Nenner (unten).

- Multiplikation immer im Zähler: $k \cdot \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}$
- Division immer im Nenner: $\frac{1}{k} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{kb}$
- Da $\frac{k}{k} = 1$, kann man Kürzen: $\frac{ka}{kb} = \frac{k}{k}\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

  und Erweitern: $\frac{a}{b} = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{k}{k}\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$.

Den Kehrwert eines Bruches zu bilden, heißt:

$\frac{a}{b} \longrightarrow \frac{b}{a}$, sodass $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$

Das heißt: $\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$

Mehrfachbrüche:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Addition von Brüchen:

Die Zähler werden addiert, sofern die Nenner gleich sind,

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}.$$

Andernfalls wird zuvor der <u>Hauptnenner</u> gebildet:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{m} = \frac{a}{n} \cdot 1 + \frac{b}{m} \cdot 1$$

$$= \frac{a}{n}\,\frac{m}{m} + \frac{b}{m}\,\frac{n}{n} = \frac{am}{nm} + \frac{bn}{nm} = \frac{am + bn}{nm}.$$

Bsp.: $$\frac{2c-5b}{6ab-10b^2} - \frac{5(2c-3a)}{18a^2-30ab} = \frac{2c-5b}{2b(3a-5b)} - \frac{5(2c-3a)}{6a(3a-5b)}$$

$$= \frac{1}{2(3a-5b)}\left[\frac{2c-5b}{b} - \frac{5(2c-3a)}{3a}\right]$$

$$= \frac{1}{2(3a-5b)}\;\frac{3a(2c-5b) - 5b(2c-3a)}{3ab}$$

$$= \frac{1}{6ab(3a-5b)}\left(6ac - \cancel{15ab} - 10bc + \cancel{15ab}\right)$$

$$= \frac{1}{6ab\,\cancel{(3a-5b)}}\;2c\,\cancel{(3a-5b)} = \underline{\underline{\frac{c}{3ab}}}$$

Potenzen

(hier: $n \in \mathbb{N}$)

Schreibweise:

Exponent

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ gleiche Faktoren}} = a^n = b$$

Potenzwert

Basis

speziell:

$$a^0 = 1,$$
$$0^n = 0,$$
$$1^n = 1$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade} \\ -1, & n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad \text{oder:} \qquad \begin{aligned} (-1)^{2n} &= 1, \\ (-1)^{2n+1} &= -1 \end{aligned}$$

Potenzgesetze:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad \text{denn: } a^m \cdot a^n = \underbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren}}}_{m+n \text{ Faktoren}}$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n, \qquad \text{denn: } a^n \cdot b^n = (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)$$
$$= \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{n \text{ Paare}}$$

je m Faktoren

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}, \qquad \text{denn: } (a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ Faktoren}}$$

negative Exponenten:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{bzw.} \qquad a^n = \frac{1}{a^{-n}} = (a^{-n})^{-1} = (a^{-1})^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n}$$

$$\rightarrow \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot (a^n)^{-1} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$$

$$\rightarrow \frac{a^n}{b^n} = a^n \cdot (b^n)^{-1} = a^n \cdot (b^{-1})^n = (a \cdot b^{-1})^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \left(a \cdot \frac{1}{b}\right)^{-1} = (a \cdot b^{-1})^{-1} = (a^{-1}) \cdot (b^{-1})^{-1} = a^{-1} \cdot b$$

$$= \frac{1}{a} \cdot b = \frac{b}{a}$$

$$\rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Wurzeln

(hier: $n \in \mathbb{N}$)

Möchte man $b^n = a$ nach b lösen, so hat man die n-te Wurzel zu ziehen, $b = \sqrt[n]{a}$.

Es gibt $\sqrt[n]{a}$ die Zahl b, die in die n-te Potenz erhoben a ergibt, $b^n = a$.

Man schreibt für $n = 2$: $\sqrt[2]{a} \equiv \sqrt{a}$.

Schreibweise:

Wurzel-exponent — $\sqrt[n]{a} = b$ — Wurzelwert

Radikant

speziell: $\sqrt[n]{0} = 0$

$\sqrt[n]{1} = 1$

$\sqrt[1]{a} = a$

beachte: Die Gleichung $b^0 = a$ hat

... keine Lösung für b, wenn $a \neq 1$, da $b^0 = 1$.

... beliebig viele Lösungen für b, wenn $a = 1$.

zur Quadratwurzel:

$\sqrt{a}$ nicht definiert für $a < 0$ (später...)

Ist $x^2 = a$ $(a > 0)$, dann folgt $\sqrt{x^2} = \sqrt{a}$ und daraus

$$|x| = \sqrt{a}.$$

→ Fallunterscheidung: $x > 0$: $x = \sqrt{a}$

$x < 0$: $-x = \sqrt{a}$

Falsch wäre bspw. zu schreiben $\sqrt{9} = \pm 3$. Die Wurzel selbst ist positiv definiert!

Potenz-Schreibweise:

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, denn: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$

Daraus folgen die Rechenregeln:

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\,\sqrt[n]{b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[p]{a^m}\,\sqrt[q]{a^n} = \sqrt[pq]{a^{mq+np}}$$

$$\frac{\sqrt[p]{a^m}}{\sqrt[q]{a^n}} = \sqrt[pq]{a^{mq-np}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

beachte: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ (!)

Vereinfachung von Brüchen durch „Rationalmachen" des Nenners:

3. binom. Formel: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$\frac{6}{2+\sqrt{2}} = \frac{6}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{6(2-\sqrt{2})}{4-2} = 3(2-\sqrt{2})$$

Gleichungen

Eigenschaften des Gleichheitszeichens:

- Reflexivität, d.h. es gilt $a=a$;
- Symmetrie, d.h. gilt $a=b$, dann gilt auch $b=a$;
- Transitivität, d.h. gilt $a=b$ und $b=c$, dann gilt auch $a=c$.

Gleichungen sind Darstellungen logischer Aussagen, deren Form mit Hilfe von Äquivalenzumformungen manipuliert werden kann.

Eine Äquivalenzumformung ist bspw. die Addition oder Subtraktion auf beiden Seiten einer Gleichung.

$$
\begin{aligned}
& a + 3 = x^2 - 5 \\
\Leftrightarrow \quad & a = x^2 - 8
\end{aligned}
$$

Äquivalenzpfeil

wichtig: Umkehrbarkeit von Äquivalenzumformungen

Bei Multiplikation/Division einer Zahl, muss sichergestellt werden, dass diese nicht Null ist.

$$\frac{x}{a-b} = z \quad \not\Leftrightarrow \quad x = z(a-b)$$

$$\frac{x}{a-b} = z\,, \quad a \neq b \quad \Longleftrightarrow \quad x = z(a-b)$$

Beachte ebenfalls, dass die Information über das Vorzeichen einer Zahl beim Quadrieren verlorengeht.

$x - 1 = a$ hat eine Lösung, $x = 1 + a$.

$(x-1)^2 = a^2$ hat zwei Lösungen, $x_1 = 1 + a$, $x_2 = 1 - a$.

Das explizite Auflösen einer Gleichung nach einer Größe ist nicht immer möglich.

z. B.: $\quad x + \sin(x) = 0$