Lineare Gleichungssysteme

Grundsätzlich können Gleichungen in vier Arten unterschieden werden.

- <u>Identische Gleichungen</u> sind Darstellungen wahrer mathematischer Aussagen, z.B. $5+2=7$ oder $a \cdot b = b \cdot a$.

- <u>Funktionsgleichungen</u> stellen Zusammenhänge zwischen verschiedenen variablen Größen her; beispielsweise gehorcht der Flächeninhalt A eines Kreises in Abhängigkeit des Radius r der Gleichung $A(r) = \pi r^2$.

- <u>Definitionsgleichungen</u> ordnen mathematischen Ausdrücken eine Bezeichnung durch ein Symbol zu; man schreibt z.B. $z := 2x^2 + 1$.

- <u>Bestimmungsgleichungen</u> enthalten eine Variable, deren Wert grundsätzlich jede (reelle) Zahl sein kann. Die Menge aller Werte der Variable, für die eine Gleichung den Wahrheitswert „wahr" hat, heißt <u>Lösungsmenge</u> $\mathbb{L}$ dieser Gleichung.

In diesem Abschnitt geht es um lineare Gleichungen, also Bestimmungsgleichungen, deren Variablen höchstens in erster Potenz auftreten.

Mengen und Intervalle

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten, ihren Elementen; ist ein Element e in einer Menge M enthalten, schreibt man $e \in M$.

Mengen können mit Hilfe der Mengenklammer $\{\dots\}$ definiert werden, üblicherweise durch explizite Auflistung, bspw. $M = \{a, b, k, s\}$, oder durch Angabe einer definierenden Eigenschaft ihrer Elemente, bspw. $M = \{n \mid n \text{ ist eine gerade Zahl.}\}$.

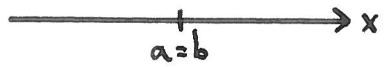
Wichtige Mengen sind die Zahlbereiche, insbesondere

- die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$;
- die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$;
- die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$;
- die reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Diese speziellen Mengen haben die besondere Eigenschaft, einer Ordnungsrelation zu unterliegen, d.h. man kann angeben, ob ein bestimmtes Element kleiner, größer oder gleich einem anderen Element ist. Dadurch ist es möglich, Intervalle zu definieren.

$a < b$:

$a = b$:

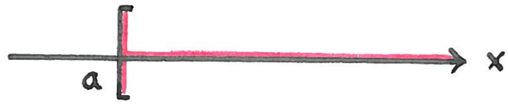


$a > b$:

Ab hier beziehen wir uns auf die reellen Zahlen. Ein Intervall ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, die durch die Angabe begrenzender Elemente gebildet wird. Es gibt zwei Möglichkeiten, eine Intervallgrenze $a \in \mathbb{R}$ aufzufassen:

1. Die Grenze a ist Teil des Intervalls, $x \geq a$ oder $x \leq a$.

$x \geq a$



$x \leq a$

2. Die Grenze a ist nicht Teil des Intervalls, $x > a$ oder $x < a$.

$x > a$

$x < a$

Damit lassen sich endliche Intervalle definieren als

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \quad \text{abgeschlossenes Intervall,}$$
$$\left.\begin{array}{l} [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\ (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \end{array}\right\} \quad \text{halboffene Intervalle,}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \quad \text{offenes Intervall,}$$

und unendliche als

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\},$$
$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\},$$
$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\},$$
$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}.$$

Außerdem: $\mathbb{R}^+ \equiv (0, \infty)$, $\mathbb{R}^- \equiv (-\infty, 0) \longrightarrow \mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$;
$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

Man beachte, dass das ∞-Zeichen nur ein Symbol ist und kein Element der reellen Zahlen. Es gibt demnach keine unendlichen abgeschlossenen Intervalle!

Im Umgang mit Ungleichungen sind folgende Rechenregeln zu beachten:

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad b > a \quad ,$$
$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad a + c < b + c \quad ,$$
$$a < b \ \wedge \ c > 0 \quad \Rightarrow \quad ca < cb \quad ,$$
$$a < b \ \wedge \ c < 0 \quad \Rightarrow \quad ca > cb \quad .$$

Es ist „$\wedge$" das Zeichen für ein logisches „und". Wichtig ist, dass die Multiplikation mit einer negativen Zahl eine Umkehrung des Relationszeichens impliziert.

<u>Bsp.</u>

$$3 < 5 \qquad |\cdot(-2)$$
$$-6 > -10$$

Aus diesem Grunde müssen bei der Auflösung von Ungleichungen mit einer Unbekannten oft <u>Fallunterscheidungen</u> vorgenommen werden.

<u>Bsp.</u>

$$\frac{2x-1}{x+2} > 3 \quad , \qquad x \neq -2$$

<u>$x > -2$</u>: $x+2$ positiv	<u>$x < -2$</u>: $x+2$ negativ
$\frac{2x-1}{x+2} > 3 \qquad |\cdot(x+2)$	$\frac{2x-1}{x+2} > 3 \qquad |\cdot(x+2)$
$2x-1 > 3x+6 \qquad |-2x, -6$	$2x-1 < 3x+6 \qquad |-2x, -6$
$-7 > x$ ↯ da $x > -2$	$-7 < x$
$\Rightarrow$ keine Lösung für diesen Fall	$\Rightarrow -7 < x < -2$

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist $\mathbb{L} = (-7, -2) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -7 < x < -2\}$.

Lineare Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten

allgemeine Form:

$$a_1 x + b_1 y = k_1 , \quad (1)$$
$$a_2 x + b_2 y = k_2 , \quad (2)$$

mit festen Größen a_i, b_i, k_i $(i=1,2)$ und Unbekannten (Variablen) x, y

Die Lösung erfolgt im Allgemeinen durch Rückführung auf zwei Gleichungen mit jeweils einer Unbekannten.

1. Additions-/Subtraktionsmethode
   Durch Linearkombination der Gleichungen wird zunächst eine Variable eliminiert, $a_2 \cdot (1) - a_1 \cdot (2)$:

$$\cancel{a_2 a_1 x} + a_2 b_1 y - \cancel{a_1 a_2 x} - a_1 b_2 y = a_2 k_1 - a_1 k_2$$
$$(a_2 b_1 - a_1 b_2) y = a_2 k_1 - a_1 k_2$$

$$\longrightarrow \quad y = \frac{a_2 k_1 - a_1 k_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \quad , \quad \text{sofern} \quad a_2 b_1 - a_1 b_2 \neq 0 .$$

Aus $b_2 \cdot (1) - b_1 \cdot (2)$ erhält man analog

$$x = \frac{b_2 k_1 - b_1 k_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad .$$

2. Lösung durch Einsetzen
   Auflösen von (1) nach y gibt $y = \frac{k_1 - a_1 x}{b_1}$ $(b_1 \neq 0)$ und Einsetzen in (2) führt auf

$$a_2 x + \frac{b_2}{b_1}(k_1 - a_1 x) = k_2 \qquad \Big| \cdot b_1$$

$$a_2 b_1 x + b_2 k_1 - a_1 b_2 x = b_1 k_2 \qquad \Big| - b_2 k_1$$

$$(a_2 b_1 - a_1 b_2)x = b_1 k_2 - b_2 k_1$$

$$\longrightarrow \quad x = \frac{b_1 k_2 - b_2 k_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \quad , \text{ sofern } a_2 b_1 - a_1 b_2 \neq 0.$$

Einsetzen in den Ausdruck für y ergibt

$$y = \frac{1}{b_1}\left(k_1 - a_1 \frac{b_1 k_2 - b_2 k_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2}\right) = \frac{1}{\cancel{b_1}} \frac{a_2 \cancel{b_1} k_1 - \cancel{a_1 b_2 k_1} - a_1 \cancel{b_1} k_2 + \cancel{a_1 b_2 k_1}}{a_2 b_1 - a_1 b_2}$$

$$= \frac{a_2 k_1 - a_1 k_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \, .$$

Nach Auffinden der Lösung ist stets die Probe durch Einsetzen in beide Gleichungen durchzuführen.

<u>Bsp.</u>

$$a x + b y = 2a \qquad (1)$$
$$a^2 x - b^2 y = a^2 + b^2 \qquad (2)$$

$b \cdot (1) + (2)$:
$$a b x + \cancel{b^2 y} + a^2 x - \cancel{b^2 y} = 2ab + a^2 + b^2$$
$$a \cancel{(a+b)} x = (a+b)^{\cancel{2}} \quad , \quad a+b \neq 0$$

$$\longrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{a+b}{a}}} \quad , \quad a \neq 0$$

Einsetzen in (1):
$$\cancel{a} \frac{a+b}{\cancel{a}} + b y = 2a \qquad | -a, -b$$
$$b y = a - b$$

$$\longrightarrow \quad \underline{\underline{y = \frac{a-b}{b}}} \quad , \quad b \neq 0$$

Spezialfälle:

1. $\underline{b_1 = 0}$

$$(1) \quad a_1 x = k_1 \longrightarrow x = \frac{k_1}{a_1}$$

$$(2) \quad a_2 \frac{k_1}{a_1} + b_2 y = k_2 \longrightarrow y = \frac{a_1 k_2 - a_2 k_1}{a_1 b_2}$$

2. $\underline{a_2 b_1 - a_1 b_2 = 0}$ $\qquad a_2 \cdot (1):$

$$a_1 a_2 x + a_2 b_1 y = a_2 k_1$$
$$a_1 a_2 x + a_1 b_2 y = a_2 k_1$$
$$\underbrace{a_1 (a_2 x + b_2 y)}_{a_1 \cdot (2)} = a_2 k_1$$

$$\Rightarrow \quad \underline{a_1 k_2 \overset{!}{=} a_2 k_1}$$

Gilt diese (von x und y unabhängige) Bedingung nicht, so hat das Gleichungssystem keine Lösung – die Lösungsmenge ist dann die leere Menge, $\mathbb{L} = \emptyset$.

Gilt die Bedingung, so gilt $a_2 \cdot (1) = a_1 \cdot (2)$, das heißt die Gleichungen sind <u>linear abhängig</u>. Damit ist jedes Paar (x, y), das eine der Gleichungen erfüllt, Lösung des gesamten Gleichungssystems und es gibt unendlich viele Lösungen.

Einschub: Lineare Funktionen

Unter einer <u>Funktion</u> versteht man eine Vorschrift, die jedem Element x aus einer Menge $\mathbb{D}$ genau ein Element y aus einer Menge $\mathbb{W}$ zuordnet; $y = f(x)$.

Bezeichnung:
- x – unabhängige Variable oder Argument
- y – abhängige Variable oder Funktionswert
- $\mathbb{D}$ – Definitionsbereich der Funktion
- $\mathbb{W}$ – Wertebereich der Funktion

mathematische Schreibweise: $\quad f: \mathbb{D} \to \mathbb{W}, \quad x \mapsto y = f(x)$

In der Physik findet man viele <u>lineare</u> Abhängigkeiten, unter anderem:

- Fallgeschwindigkeit v als Funktion der Zeit t,

$$v(t) = g\,t + v_0 \qquad (g:\ \text{Erdbeschleunigung});$$

- Ohm'sches Gesetz für die Spannung U als Funktion des Stromes I,

$$U(I) = R\,I \qquad (R:\ \text{Widerstand});$$

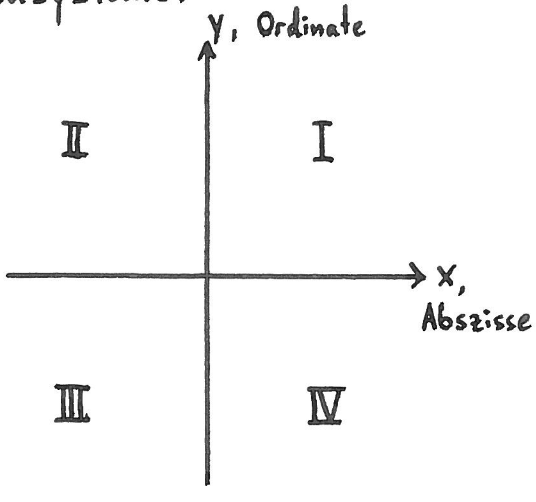
- äußerer photoelektrischer Effekt mit der kinetischen Energie des Photoelektrons E_{kin} als Funktion der Frequenz des Lichts f,

$$E_{kin}(f) = h\,f - W_A \qquad (h:\ \text{Planck'sches Wirkungsquantum},\ W_A:\ \text{Auslösearbeit}).$$

Die allgemeine Form einer linearen Funktion ist

$$\boxed{f(x) = m\,x + n,} \qquad \begin{array}{ll} m: & \text{Anstieg}, \\ n: & \text{Verschiebung entlang der y-Achse}. \end{array}$$

Die graphische Darstellung erfolgt mit Hilfe des <u>kartesischen Koordinatensystems</u>.



Das Koordinatensystem ist in vier <u>Quadranten</u> eingeteilt:

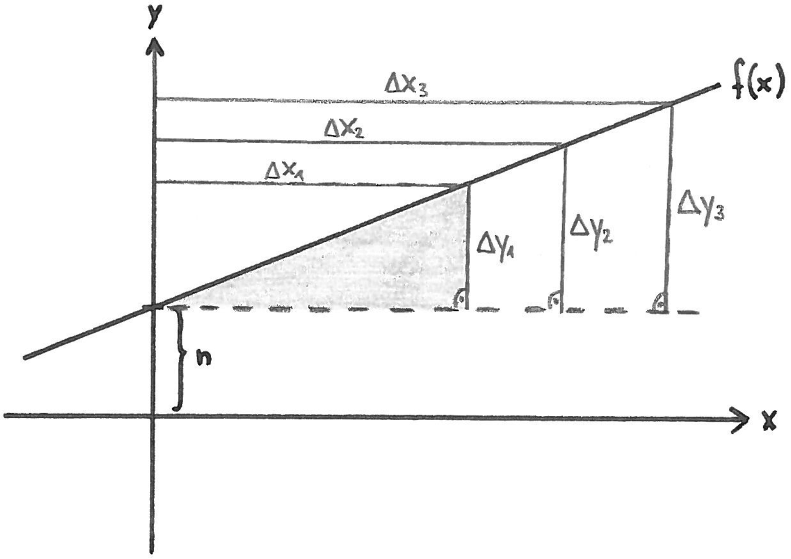
I : $x > 0,\ y > 0$;

II : $x < 0,\ y > 0$;

III : $x < 0,\ y < 0$;

IV : $x > 0,\ y < 0$.

graphische Darstellung der linearen Funktion:



Unter dem Graphen der Funktion befinden sich ähnliche Dreiecke (rechtwinklig, übereinstimmendes Kathetenverhältnis).

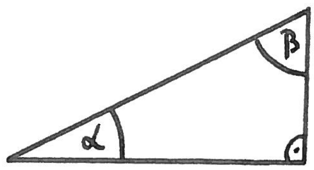
Austieg: $m = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$

Spezialfälle:

- $y = \pm x$, Austieg von 45° ($m = \pm 1$) ;
- $y = 0$, x-Achse ($m = 0$) ;
- $y = n$, Horizontale im Abstand n von der x-Achse ($m = 0$)

<u>Bsp.</u> Betrachten wir die Innenwinkel eines rechtwinkligen Dreiecks,

$$\alpha + \beta + 90° = 180°,$$
$$\alpha + \beta = 90°,$$

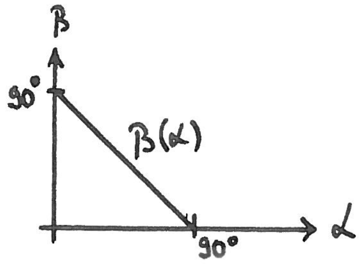


so können wir β als lineare Funktion von α auffassen,

$$\beta(\alpha) = -\alpha + 90°$$

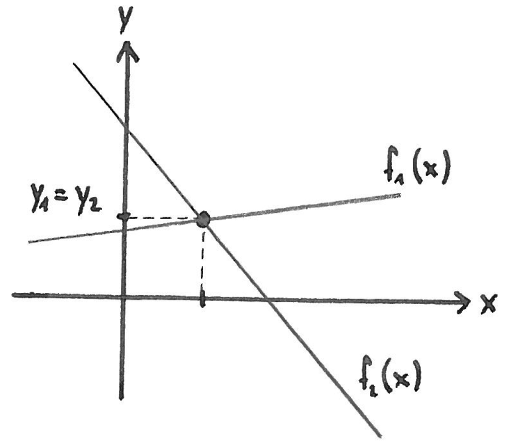
mit Definitionsbereich $0° < \alpha < 90°$
und Wertebereich $0° < \beta < 90°$.

graphisch:



Stellen wir die Graphen zweier linearer Funktionen im selben kartesischen Koordinatensystem dar, so existiert ein Schnittpunkt (sofern die beiden Geraden nicht parallel sind).

$$y_1 = f_1(x) = m_1 x + n_1$$
$$y_2 = f_2(x) = m_2 x + n_2$$



Am Schnittpunkt ist $y_1 = y_2 = y$ und wir können schreiben

$$y - m_1 x = n_1 ,$$
$$y - m_2 x = n_2 ;$$

es handelt sich also um ein Gleichungssystem mit 2 Unbekannten (den Schnittpunktkoordinaten) der Form

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= k_1 , \\ a_2 x + b_2 y &= k_2 , \end{aligned} \quad \text{mit} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = -m_1 , \quad a_2 = -m_2 ; \\ b_1 = b_2 = 1 ; \quad k_1 = n_1 , \quad k_2 = n_2 . \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten zu lösen, bedeutet, den Schnittpunkt zweier Geraden zu bestimmen (und umgekehrt).

<u>Spezialfall $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$:</u> Die Geraden sind parallel.

$\longrightarrow$ $a_1 k_2 = a_2 k_1$: Die Geraden liegen aufeinander (unendlich viele „Schnittpunkte").

$\longrightarrow$ $a_1 k_2 \neq a_2 k_1$: Die Geraden liegen nicht aufeinander (kein Schnittpunkt).

Bem. Schreibweisen und Bezeichnungen

Jede lineare Gleichung mit zwei Unbekannten,

$$\boxed{ax + by + c = 0} \quad \text{(allg. Geradengleichung),}$$

kann in die oben verwendete Form gebracht werden:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad ; \quad m \equiv -\frac{a}{b}, \quad n \equiv -\frac{c}{b}$$

$$\longrightarrow \boxed{y = mx + n} \quad \text{(Normalform).}$$

Eine weitere Variante:

$$-\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y = 1 \quad ; \quad A \equiv -\frac{c}{a}, \quad B \equiv -\frac{c}{b}$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1} \quad \text{(Achsenabschnittsform),}$$

wobei die Schnittpunkte mit x- und y-Achse unmittelbar ablesbar sind.

Lineare Gleichungssysteme mit 3 Unbekannten

allgemeine Form:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = k_1 , \qquad (1)$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = k_2 , \qquad (2)$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = k_3 , \qquad (3)$$

mit festen Größen a_i, b_i, c_i, k_i $(i=1,2,3)$ und Variablen x, y, z

Die Lösung erfolgt im Allgemeinen durch Rückführung auf ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten.

$c_2 \cdot (1) - c_1 \cdot (2)$:
$$\underbrace{(a_1 c_2 - a_2 c_1)}_{a_1'} x + \underbrace{(b_1 c_2 - b_2 c_1)}_{b_1'} y = \underbrace{k_1 c_2 - k_2 c_1}_{k_1'}$$

$c_3 \cdot (1) - c_1 \cdot (3)$:
$$\underbrace{(a_1 c_3 - a_3 c_1)}_{a_2'} x + \underbrace{(b_1 c_3 - b_3 c_1)}_{b_2'} y = \underbrace{k_1 c_3 - k_3 c_1}_{k_2'}$$

Unter Zuhilfenahme bereits besprochener Methoden löse man das neue Gleichungssystem

$$a_1' x + b_1' y = k_1' , \qquad (4)$$
$$a_2' x + b_2' y = k_2' , \qquad (5)$$

für x, y und bestimme z durch Einsetzen in (1), (2) oder (3).

Bsp.

$$x - 3y - 2z = 5 , \qquad (1)$$
$$-x + y + z = 0 , \qquad (2)$$
$$5x + y + 4z = 3 \qquad (3)$$

$(1) + 2 \cdot (2)$: $\quad -x - y = 5 \qquad (4)$

$4 \cdot (1) + 2 \cdot (3)$: $\quad 14x - 10y = 26$

$$7x - 5y = 13 \qquad (5)$$

$7 \cdot (4) + (5):$ $\quad -12y = 48 \longrightarrow \underline{y = -4}$

in (4): $\quad \underline{x = -1}$

in (2): $\quad \underline{z = 3}$

Probe in (1) und (3)! $\longrightarrow$ ✓

Lösungsmenge $\quad \underline{\underline{\{(x; y; z)\} = \{(-1; -4; 3)\}}}$

Von einem <u>unterbestimmten</u> Gleichungssystem spricht man, wenn es mehr Unbekannte als Gleichungen gibt bzw. Gleichungen linear abhängig sind.

<u>Bsp.</u>

$$2x - y + z + 2 = 0, \qquad (1)$$
$$x + y - z + 1 = 0, \qquad (2)$$
$$7x + y - z + 7 = 0 \qquad (3)$$

Wir können vermittels einer allgemeinen Linearkombination auf lineare Abhängigkeit prüfen:

$$a \cdot (1) + b \cdot (2) \stackrel{!}{=} (3)$$
$$\longrightarrow (2a+b)x + (b-a)y + (a-b)z + (2a+b) \stackrel{!}{=} 7x + y - z + 7.$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{array}{ll} x: & 2a+b = 7 \\ y: & b-a = 1 \\ z: & a-b = -1 \\ 1: & 2a+b = 7 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2a+b=7 \\ b-a=1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a=2 \\ b=3 \end{array}$$

Wenn dieses (überbestimmte) System eine Lösung besitzt, dann ist das ursprüngliche Gleichungssystem $\{(1), (2), (3)\}$ unterbestimmt; hier: Wegen $2 \cdot (1) + 3 \cdot (2) = (3)$ enthält (3) keine neuen Informationen. Betrachte nur (1) und (2):

mit Substitution $u \equiv y-z$:
$$2x - u + 2 = 0,$$
$$x + u + 1 = 0.$$

$$\longrightarrow \quad \underline{x=-1} \quad , \quad u=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{y=z}$$

Das heißt, das alle Punkte $x=-1$, $y=z$ (unendlich viele) das Gleichungssystem lösen.
Wählen wir eine Parametrisierung $y(t)=t$, $z(t)=t$ mit $t \in \mathbb{R}$, dann ist die Lösungsmenge

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(-1,t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}}}.$$

Zur graphischen Darstellung einer Gleichung mit drei Unbekannten wählen wir die allgemeine Form

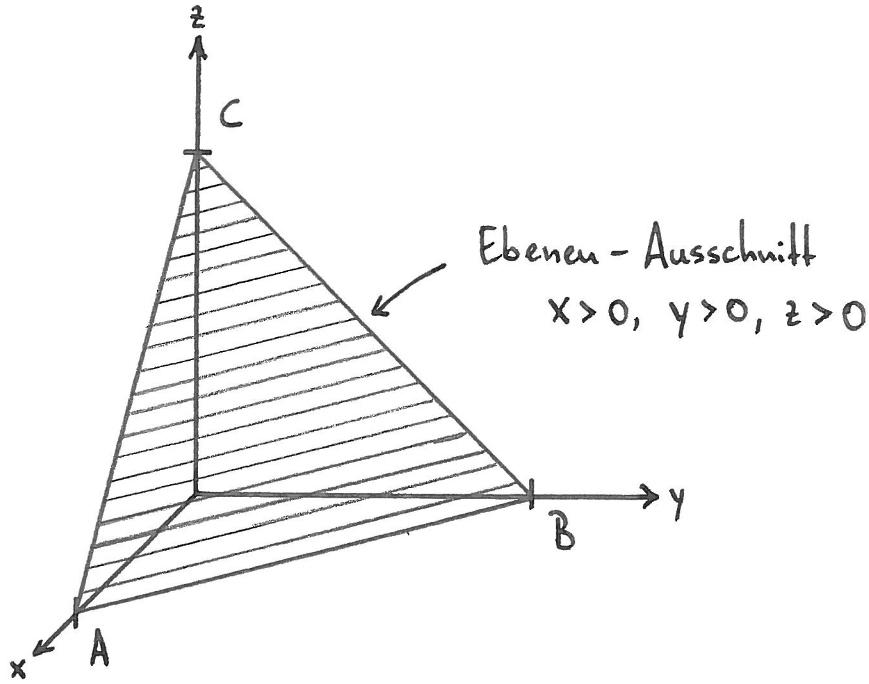
$$ax + by + cz + d = 0 \quad | : d$$

und benennen die Koeffizienten um: $-\frac{d}{a} \equiv A$, $-\frac{d}{b} \equiv B$, $-\frac{d}{c} \equiv C$.

$$\boxed{\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1} \quad \text{(Achsenabschnittsform)}$$

für $y=0$, $z=0$: $x=A$ $\longrightarrow$ Schnittpunkt mit der x-Achse
für $x=0$, $z=0$: $y=B$ $\longrightarrow$ Schnittpunkt mit der y-Achse
für $x=0$, $y=0$: $z=C$ $\longrightarrow$ Schnittpunkt mit der z-Achse

Demnach wird durch obige Gleichung eine Ebene im dreidimensionalen Raum beschrieben, welche die Koordinatenachsen in den Punkten $(A;0;0)$, $(0;B;0)$ und $(0;0;C)$ schneidet.



Jeder der drei Gleichungen entspricht eine Ebene.

→ Schneiden sich alle drei Ebenen in einem Schnittpunkt, dann existiert genau eine Lösung.

→ Schneiden sich alle drei Ebenen in einer Schnittgeraden, dann ist das Gleichungssystem unterbestimmt.

→ Besitzen die drei Ebenen nicht mindestens einen gemeinsamen Punkt, dann existiert auch keine Lösung.