Quadratische Gleichungssysteme

In diesem Abschnitt geht es um quadratische Gleichungen, also Bestimmungsgleichungen, deren Variablen höchstens in zweiter Potenz auftreten, sowie um quadratische Funktionen und Systeme aus quadratischen Gleichungen.

Die quadratische Gleichung

allgemeine Form:

$$\underbrace{Ax^2}_{\text{quadratisches Glied}} + \underbrace{Bx}_{\text{lineares Glied}} + \underbrace{C}_{\text{Absolutglied}} = 0$$

Wir nehmen im Folgenden o.B.d.A. an, es sei $A > 0$. Im Übrigen sind A, B und C reelle Konstanten.

Spezialfälle:

- $B = 0$

  $$Ax^2 + C = 0$$

  $\rightarrow$ für $C \leq 0$: Lösungen $x_1 = \sqrt{-\frac{C}{A}}$, $x_2 = -\sqrt{-\frac{C}{A}}$

  $\rightarrow$ für $C > 0$: keine (reellen) Lösungen

- $C = 0$

  $$Ax^2 + Bx = 0$$
  $$x(Ax + B) = 0$$

  $\rightarrow$ Lösungen $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{B}{A}$

Zur Bestimmung einer allgemeinen Lösung verwenden wir die Methode der quadratischen Ergänzung:

1. Überführung in die Normalform,

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0 ,$$

Umbenennung $p \equiv \frac{B}{A}$, $q \equiv \frac{C}{A}$,

$$x^2 + px + q = 0 ;$$

2. quadratische Ergänzung,

$$x^2 + px = -q \qquad \Big| + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = -q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 ;$$

3. Auflösen nach x,

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} \qquad \text{„p-q-Formel"}.$$

Man bezeichnet $D \equiv \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ als Diskriminante; anhand ihres Vorzeichens können folgende Fälle auftreten:

- $D > 0$, es existieren zwei reelle Lösungen $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$;
- $D = 0$, beide Lösungen fallen zusammen, $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$;
- $D < 0$, es existiert keine (reelle) Lösung.

Betrachten wir im Falle $D \geq 0$ die Summe und das Produkt der beiden allgemeinen Lösungen,

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \cancel{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} - \frac{p}{2} - \cancel{\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} = -p \; ,$$

$$x_1 x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)$$

3. binom. Formel

$$= \frac{p^2}{4} - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \cancel{\frac{p^2}{4}} - \cancel{\frac{p^2}{4}} + q = q \; ,$$

dann folgt der <u>Vieta'sche Wurzelsatz</u> für die Lösungen quadratischer Gleichungen,

$$x_1 + x_2 = -p \quad , \quad x_1 x_2 = q \; .$$

Setzen wir dieses Resultat in die Normalform ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 x_2 \\ &= (x - x_1)(x - x_2) \; , \end{aligned}$$

also die Zerlegung in Linearfaktoren.

Quadratische Funktionen

allgemeine Form:

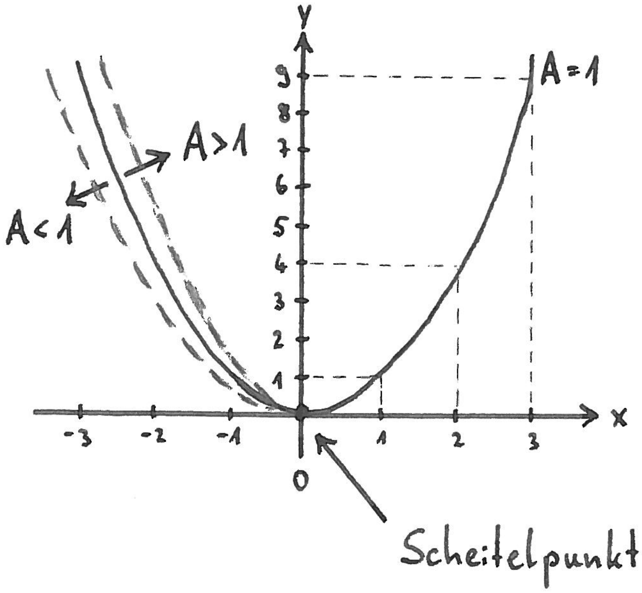
$$y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Wie im vorherigen Abschnitt sind A, B, C reelle Konstanten und o.B.d.A. $A > 0$.

Offenbar entspricht das Lösen einer quadratischen Gleichung der Suche nach den Nullstellen einer quadratischen Funktion (und umgekehrt).

Betrachten wir zunächst den Fall $B = C = 0$:

- Definitionsbereich $x \in \mathbb{R}$,
  Wertebereich $y \geq 0$;
- $A = 1$: <u>Normalparabel</u>,
  $A > 1$: gestauchte Normalparabel,
  $A < 1$: gestreckte Normalparabel;
- doppelte Nullstelle bei $x_{1|2} = 0$.



Durch Addition der Konstante y_0 verschiebt sich die Parabel entlang der y-Achse.

$\rightarrow$ $y_0 > 0$: keine Nullstellen

$\rightarrow$ $y_0 < 0$: zwei Nullstellen

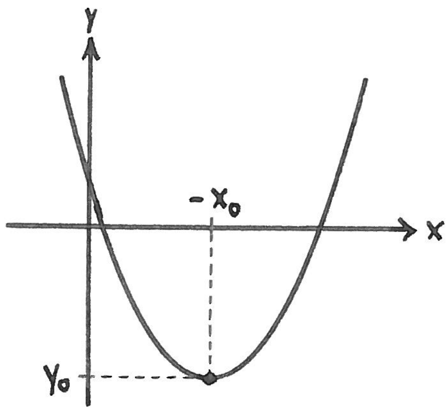
Durch $x \mapsto x + x_0$ verschiebt sich die Parabel entlang der x-Achse und wir erhalten die quadratische Funktion in <u>Scheitelpunktform</u>,

$$y = f(x) = A(x + x_0)^2 + y_0 \quad ,$$

wobei $x_0 > 0$: Verschiebung nach links,
$x_0 < 0$: Verschiebung nach rechts.

Vergleich mit der Normalform liefert

$$x_0 = \frac{B}{2A} \quad , \quad y_0 = C - A x_0^2 \, .$$



Das heißt, dass jede quadratische Funktion durch geeignete Verschiebung des Koordinatensystems auf eine Parabel der Form $f(x) = Ax^2$ zurückgeführt werden kann.

Quadratische Gleichungssysteme mit 2 Unbekannten

allgemeine Form:

$$a_i x^2 + b_i y^2 + c_i xy + d_i x + e_i y + f_i = 0$$

Die allgemeine Form ist nur umständlich zu diskutieren und es gibt sehr viele Lösungsmöglichkeiten. Daher beschränken wir uns hier auf zwei Beispiele.

Bsp. 1

$$x^2 + y^2 - 2x = \frac{11}{2}, \qquad (1)$$
$$2xy - 2y = \frac{5}{2} \qquad (2)$$

$2\cdot(1) \pm 2\cdot(2)$: $\quad 2\underbrace{(x^2+y^2 \pm 2xy)}_{(x\pm y)^2} - 4(x \pm y) = 11 \pm 5$

Substitution: $\quad x+y \equiv u \quad , \quad x-y \equiv v$

$$\longrightarrow \quad 2u^2 - 4u = 16 \quad \longrightarrow \quad u^2 - 2u - 8 = 0 \qquad (3)$$
$$\longrightarrow \quad 2v^2 - 4v = 6 \quad \longrightarrow \quad v^2 - 2v - 3 = 0 \qquad (4)$$

(3): $\quad u_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+8} \quad \longrightarrow \quad u_1 = 4, \quad u_2 = -2$

(4): $\quad v_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+3} \quad \longrightarrow \quad v_1 = 3, \quad v_2 = -1$

Resubstitution: $\quad x = \frac{1}{2}(u+v) \quad , \quad y = \frac{1}{2}(u-v)$

Damit existieren 4 Lösungspaare für (x,y), da 4 Paare (u_i, v_j) gebildet werden können.

$$x_1 = \frac{1}{2}(u_1 + v_1) = \frac{7}{2} \quad , \quad y_1 = \frac{1}{2}(u_1 - v_1) = \frac{1}{2} \; ;$$
$$x_2 = \frac{1}{2}(u_1 + v_2) = \frac{3}{2} \quad , \quad y_2 = \frac{1}{2}(u_1 - v_2) = \frac{5}{2} \; ;$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(u_2 + v_1) = \frac{1}{2} \quad , \quad y_3 = \frac{1}{2}(u_2 - v_1) = -\frac{5}{2} \ ;$$

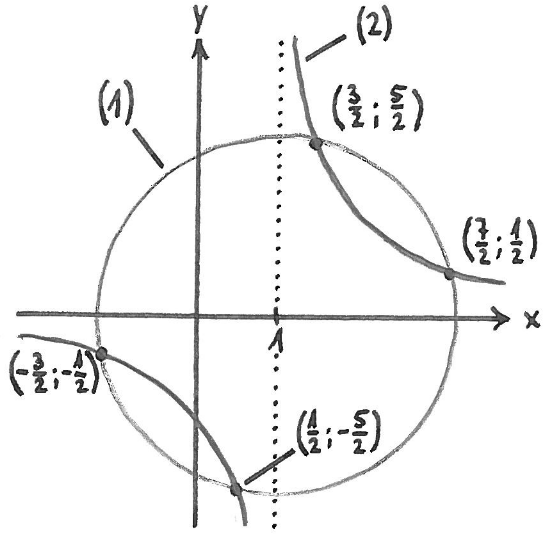
$$x_4 = \frac{1}{2}(u_2 + v_2) = -\frac{3}{2} \quad , \quad y_4 = \frac{1}{2}(u_2 - v_2) = -\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \left(\tfrac{7}{2}; \tfrac{1}{2}\right), \left(\tfrac{3}{2}; \tfrac{5}{2}\right), \left(\tfrac{1}{2}; -\tfrac{5}{2}\right), \left(-\tfrac{3}{2}; -\tfrac{1}{2}\right) \right\}}}$$

Im Zweifelsfall („Sind wirklich alle Kombinationen erlaubt?") sollte die Probe durchgeführt werden.

<u>Bem.</u> Eine geometrische Interpretation ist auch hier möglich: (1) beschreibt einen Kreis des Radius $\sqrt{\frac{13}{2}}$, dessen Mittelpunkt um 1 nach rechts verschoben ist, (2) kann als Funktion $y = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x-1}$ geschrieben werden.

Die Schnittpunktkoordinaten der Graphen sind die Lösungspaare.



<u>Bsp. 2</u>

$$x + y^2 = 2 \ , \qquad (1)$$

$$x\,y^2 = -8 \qquad (2)$$

Substitution: $\quad y^2 \equiv z$

$$\longrightarrow \begin{cases} x + z = 2, & (3) \\ x\,z = -8 & (4) \end{cases}$$

Der Satz von Vieta besagt, angewandt auf (3) und (4), dass x und z Lösungen einer quadratischen Gleichung mit $p = -2$

und $q = -8$ sind, also der Gleichung

$$u^2 + pu + q = u^2 - 2u - 8 = 0.$$

$$\longrightarrow \quad u_{1/2} = 1 \pm \sqrt{9} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

Wir könnten nun $u_1 = x$, $u_2 = z$ oder $u_1 = z$, $u_2 = x$ identifizieren, aber z muss positiv sein (siehe Substitution)!

$$\longrightarrow \quad x = -2, \quad z = 4$$

$$\longrightarrow \quad x = -2, \quad y = \pm 2$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{\mathbb{L} = \{(-2;2), (-2,-2)\}}}$$