Umgang mit beliebigen Potenzen

Bisher haben wir uns auf Gleichungen/Funktionen beschränkt, deren Variablen höchstens in erster oder zweiter Potenz aufgetreten sind. Nun sollen Methoden zum Umgang mit beliebigen (ganzzahligen) Potenzen behandelt werden.

Polynome und Polynomdivision

Ein Polynom n-ten Grades ist eine Funktion der Form

$$f_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

mit (reellen) Konstanten a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$.
Die Nullstellen der Funktion $f_n(x)$ werden auch Wurzeln des Polynoms genannt; ein Polynom n-ten Grades besitzt höchstens n reelle Wurzeln.

Besitzt ein Polynom $f_n(x)$ genau n reelle Wurzeln, dann kann es als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden (vgl. den Fall $n=2$, Satz von Vieta),

$$f_n(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1})(x - x_n),$$

mit Wurzeln x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Demnach kann eine Wurzel gemäß $f_n(x) = (x - x_n) f_{n-1}(x)$ aus einem Polynom abgespalten werden, wobei $f_{n-1}(x)$, bei bekanntem x_n, mit Hilfe der Methode der Polynomdivision zu bestimmen ist,

$$f_{n-1}(x) = f_n(x) : (x - x_n) .$$

Möchte man einen unbekannten Linearfaktor abspalten, so ist ein x_i zu erraten.

Bsp. $f_3(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$, $x_3 = 2$

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) : (x-2) = x^2 - 3x + 2 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
\quad -3x^2 + 8x - 4 \\
\quad \underline{-(-3x^2 + 6x)} \\
\qquad 2x - 4 \\
\qquad \underline{-(2x - 4)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Nullstellen von $x^2 - 3x + 2$ mittels p-q-Formel:

$$x_{1|2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \longrightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{f_3(x) = (x-1)(x-2)^2}}$$

Probe: $(x-1)(x-2)^2 = (x-1)(x^2 - 4x + 4)$
$= x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ ✓

Partialbruchzerlegung

Oft (insbesondere bei der Berechnung von Integralen) möchte man in einem Nenner auftretende Polynome zugunsten von Linearfaktoren zerlegen.

Wir betrachten das Verfahren anhand des Quotienten einer linearen und einer quadratischen Funktion:

$$f(x) = \frac{mx + n}{x^2 + px + q} = \frac{mx+n}{(x-x_1)(x-x_2)} \underset{\text{Ansatz}}{\overset{!}{=}} \frac{\alpha}{x - x_1} + \frac{\beta}{x - x_2} .$$

α und β sind so zu bestimmen, dass diese Forderung erfüllt ist.

Bilden des Hauptnenners:

$$\frac{mx+n}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{\alpha(x-x_2)+\beta(x-x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{(\alpha+\beta)x-(\alpha x_2+\beta x_1)}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{array}{lll} x^1: & m=\alpha+\beta & (1) \\ x^0: & n=-(\alpha x_2+\beta x_1) & (2) \end{array}\right\} \text{ lineares Gleichungssystem für } \alpha, \beta$$

$x_1\,(1)+(2)$: $\qquad mx_1+n=\alpha(x_1-x_2)$

$$\longrightarrow \quad \underline{\underline{\alpha=\frac{mx_1+n}{x_1-x_2}}}\ , \qquad x_1 \neq x_2$$

$$\xrightarrow{(1)} \quad \underline{\underline{\beta=-\frac{mx_2+n}{x_1-x_2}}}$$

Offenbar versagt dieser Ansatz für $x_1=x_2$, wenn also der Nenner eine doppelte Nullstelle hat. In diesem Fall jedoch hat $f(x)$ bereits die gewünschte Form,

$$f(x)=\frac{mx+n}{(x-x_0)^2}\ , \qquad x_0\equiv x_1=x_2\ .$$

Im allgemeinen Fall haben wir den Quotienten aus einem Polynom p-ten Grades und einem Polynom q-ten Grades $(p<q)$[1] zu zerlegen. Dann sind zunächst die Nullstellen des Nenners x_i zu bestimmen; der Ansatz enthält für jede einfache Nullstelle einen Summanden

$$\frac{\alpha_i}{x-x_i}\ , \qquad \alpha_i \text{ const.}\ ,$$

und für jede k-fache Nullstelle k Summanden, einen für

1: Für $p\geq q$ kann eine Polynomdivision durchgeführt werden.

jede mögliche Potenz zwischen 1 und k,

$$\frac{\alpha_i^{(1)}}{x-x_i} + \frac{\alpha_i^{(2)}}{(x-x_i)^2} + \ldots + \frac{\alpha_i^{(k)}}{(x-x_i)^k} \quad , \quad \alpha_i^{(j)} \text{ const.}$$

<u>Bsp.</u>

$$Q(x) = \frac{3x^2+5}{(x+1)(x-1)^2} \overset{!}{=} \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{(x-1)^2}$$

$$\longrightarrow \quad 3x^2+5 = \alpha(x-1)^2 + \beta(x^2-1) + \gamma(x+1)$$

$$= (\alpha+\beta)x^2 + (\gamma-2\alpha)x + \alpha-\beta+\gamma$$

Koeffizientenvergleich : $\quad x^2 : \quad 3 = \alpha+\beta \qquad (1)$

$x^1 : \quad 0 = \gamma - 2\alpha \qquad (2)$

$x^0 : \quad 5 = \alpha-\beta+\gamma \qquad (3)$

$(1)+(2)+(3): \quad 2\gamma = 8 \quad \longrightarrow \quad \underline{\gamma = 4}$

$\xrightarrow{(2)} \quad \underline{\alpha = 2} \qquad \xrightarrow{(1)} \quad \underline{\beta = 1}$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{Q(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}}}$$

<u>Bem.</u> Jede rationale Funktion, d.i. eine Funktion, die als Quotient zweier Polynome geschrieben werden kann, lässt sich als Summe von Brüchen der Form

$$\frac{\alpha_i}{(x-x_i)^j}$$

sowie ggf. einer „reinen" Polynomfunktion darstellen.

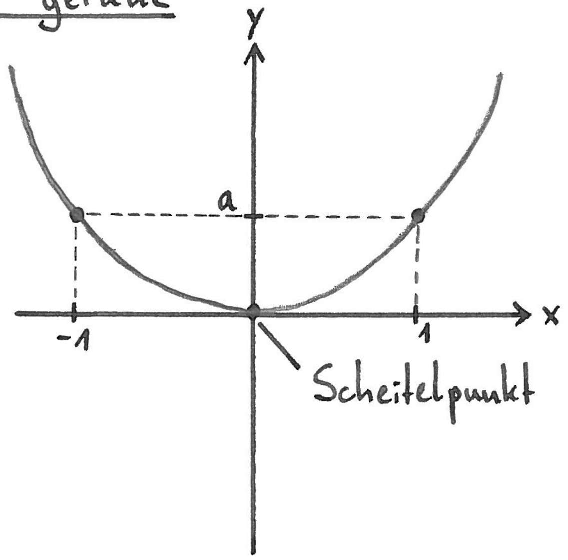
Bem. Sind Zähler und Nenner vom gleichen Grade, ist dem Ansatz ein konstanter Summand hinzuzufügen.
Alternativ kann zunächst auch eine Polynomdivision mit Rest durchgeführt werden; der Rest ist dann ein Bruch mit kleinerem Zähler- als Nennergrad, sodass „normal" weitergerechnet werden kann.

Potenzfunktionen

Potenzfunktionen sind Funktionen der Form $f(x) = a x^n$, wobei hier nur die Fälle $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{Z}$ betrachtet werden sollen.

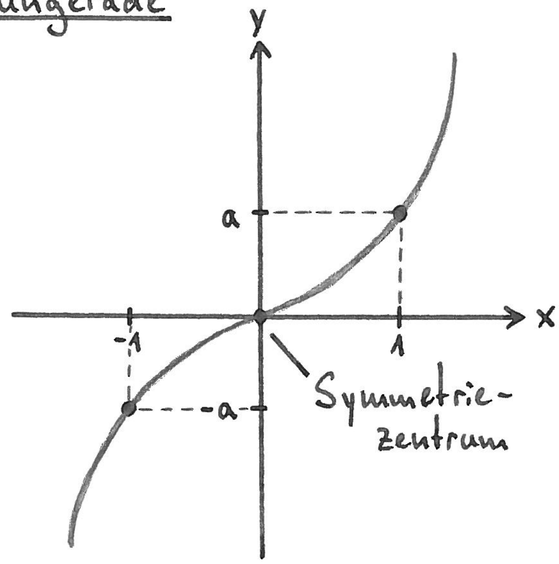
1. Parabeln n-ter Ordnung: $n > 0$

n gerade



- Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$
- Wertebereich: $y \in [0, \infty)$
- gerade, $f(-x) = f(x)$
- axialsymmetrisch zur y-Achse

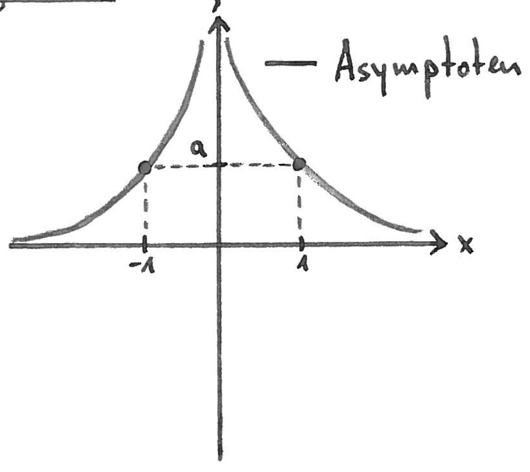
n ungerade



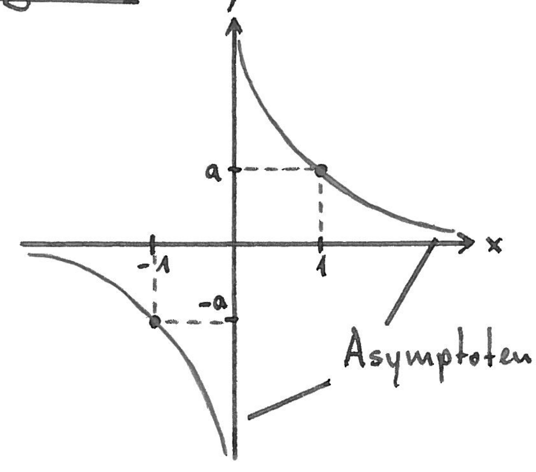
- Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$
- Wertebereich: $y \in \mathbb{R}$
- ungerade, $f(-x) = -f(x)$
- punktsymmetrisch zum Ursprung

2. Hyperbeln n-ter Ordnung: $n < 0$

n gerade



n ungerade



• Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	• Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
• Wertebereich: $y \in (0, \infty)$	• Wertebereich: $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
• gerade, $f(-x) = f(x)$	• ungerade, $f(-x) = -f(x)$
• axialsymmetrisch zur y-Achse	• punktsymmetrisch zum Ursprung

Für alle diese Potenzfunktionen gilt

$$|x| \xrightarrow{|y| \to \infty} \infty \,,$$
$$|y| \xrightarrow{|x| \to \infty} \infty \,.$$