Das Summenzeichen

Für viele Anwendungen erweist es sich als praktisch, sehr lange (oder auch unendliche) Summen kompakt aufzuschreiben.

Betrachten wir eine Summe S aus n Summanden,

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n \,,$$

wobei jeder Summand mit einem <u>Index</u> gekennzeichnet ist,

$$s_i \,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \,.$$

Die Indizes dienen zunächst nur dazu, die Summanden zu unterscheiden und sind im Allgemeinen willkürlich gesetzt — schließlich hängt der Wert der Summe nicht von der Summationsreihenfolge ab.
Als Kurzschreibweise für Summen verwendet man den großen griechischen Buchstaben Sigma:

$$S = \sum_{i=1}^{n} s_i \qquad , \text{ mit Startwert } i=1 \text{ und Endwert } i=n.$$

<u>Bsp.</u> Polynome

Hier sind die Summanden die jeweiligen Potenzen von x mit ihren Vorfaktoren und es bietet sich an, die Potenzen als Indizes zu benutzen:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,. \end{aligned}$$

Bsp. Summe der ersten n Zahlen
Hier bietet sich an, die Zahlen selbst als Indizes zu benutzen:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n-1 + n .$$

Eigenschaften:

- Die Benennung des Summationsindex ist irrelevant,

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{k=1}^{n} s_k .$$

- Summen von Summen/Differenzen sind Summen/Differenzen von Summen,

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i .$$

- Gleiche (vom Index unabhängige) Faktoren können ausgeklammert werden,

$$\sum_{i=1}^{n} (a\, s_i) = a \sum_{i=1}^{n} s_i .$$

$\longrightarrow$ speziell: $\sum_{i=1}^{n} a = a \sum_{i=1}^{n} 1 = a\,\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n \text{ mal}} = n \cdot a$

- Summen können aufgeteilt werden,

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{m} s_i + \sum_{i=m+1}^{n} s_i .$$

- Startwerte können verändert werden,

$$\sum_{k=m}^{n} s_k = \sum_{k=1}^{n} s_k - \sum_{k=1}^{m-1} s_k .$$

$\longrightarrow$ speziell: $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{m-1} 1 = n - (m-1) = 1 + n - m$

Bem. Es gibt einige weitere Möglichkeiten, Summen zu schreiben, bspw. kann der Index Werte einer (abzählbaren) Menge M annehmen,

$$\sum_{i \in M} s_i \quad ,$$

oder man lässt die Summationsgrenzen weg, wenn in irgendeiner Weise „klar" ist, wie summiert wird,

$$\sum_{i} s_i \quad .$$

Mehrfache Summen können mit einem Summenzeichen geschrieben werden, sofern sie unabhängig voneinander laufen:

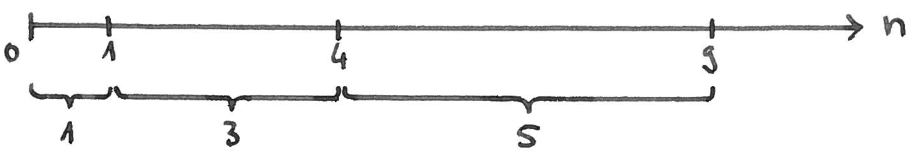
$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij} \right) = \sum_{i,j=1}^{n} s_{ij} = s_{11} + s_{12} + \ldots + s_{21} + s_{22} + \ldots + s_{nn} .$$

Dabei ist es egal, welche Summe zuerst ausgeführt wird. Letzteres gilt nicht in Fällen wie bspw.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} s_{ij} \quad .$$

Bsp. Was ist die Summe der Differenzen benachbarter Quadratzahlen?

n-te Quadratzahl $q_n = n^2$



$\longrightarrow$ Vermutung: Summe aller ungeraden Zahlen,
$1 + 3 + 5 + \ldots$

$$\longrightarrow \sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)^2 - k^2\right] = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 - \sum_{k=0}^{n}k^2$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(\cancel{k^2} + 2k + 1) - \cancel{\sum_{k=0}^{n}k^2} = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)$$

Das ist in der Tat die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis $2n+1$.

Da die Indizierung einzelner Summanden willkürlich ist, ist es möglich, eine <u>Indexverschiebung</u> vorzunehmen:

$$S = \sum_{i=1}^{n} s_i \quad , \qquad \text{Substitution} \quad i = j + a$$

$\longrightarrow$ Startwert: aus $i=1$ folgt $j = 1-a$

$\longrightarrow$ Endwert: aus $i=n$ folgt $j = n-a$

$$= \sum_{j=1-a}^{n-a} s_{j+a} \,.$$

<u>Bsp.</u>

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 - \sum_{k=0}^{n}k^2 = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 - \sum_{i=-1}^{n-1}(i+1)^2$$

Substitution $k = i+1$

$$= \sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 - \sum_{k=-1}^{n-1}(k+1)^2 = (n+1)^2 + \cancel{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2} + (-1+1)^2 - \cancel{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^2}$$

Umbenennung $i \rightarrow k$

letztes Glied der ersten Summe

erstes Glied $(k=-1)$ der zweiten Summe

$$\Longrightarrow \underline{\underline{\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2}}$$

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist gleich der $(n+1)$-ten Quadratzahl.