Einschub: Exponentialfunktionen & Logarithmen

Sprechweise:

Potenzfunktionen $f(x)$ sind Funktionen, deren Variable in der Basis steht, $f(x) = x^n$.

Exponentialfunktionen $f(x)$ sind Funktionen, deren Variable im Exponenten steht, $f(x) = a^x$.

Frage: Welchen Wert n muss ein Exponent zu einer gegebenen Basis b haben, damit der Potenzwert a ergibt?

Sprich: Es gelte $a = b^n$; stelle um nach n.

Die Antwort gibt die Logarithmusfunktion:

$$n = \log_b(a) \qquad (a,b > 0;\ b \neq 1)$$

Exponent — Basis — „Numerus" (Potenzwert)

Bsp.:

$n = \log_5 625$ heißt, dass gilt: $5^n = 625$.

$\Rightarrow n = 4$

speziell: $n = \log_b 1 \Rightarrow b^n = 1 \Rightarrow n = 0$

$n = \log_b b \Rightarrow b^n = b \Rightarrow n = 1$

Identitäten:

$$b^{\log_b(a)} = b^n = a \quad , \qquad \log_b(b^n) = \log_b(a) = n$$

Logarithmengesetze

1.

$$\begin{tikzcd} u = b^p , \quad v = b^q \arrow[r] \arrow[d] & uv = b^{p+q} \arrow[d] \\ p = \log_b(u), \quad q = \log_b(v) & (p+q) = \log_b(uv) \end{tikzcd}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\log_b(uv) = \log_b(u) + \log_b(v)}$$

2.

$$\begin{tikzcd} u = b^p , \quad v = b^q \arrow[r] \arrow[d] & \frac{u}{v} = b^{p-q} \arrow[d] \\ p = \log_b(u), \quad q = \log_b(v) & (p-q) = \log_b\left(\frac{u}{v}\right) \end{tikzcd}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v)}$$

3.

$$\begin{tikzcd} b^x = u^m \arrow[r] \arrow[d] & u = b^{\frac{x}{m}} \arrow[d] \\ x = \log_b(u^m) & \frac{x}{m} = \log_b(u) \end{tikzcd}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\log_b(u^m) = m \log_b(u)}$$

Bedeutung:

3. Stufe	$\xrightarrow{\log}$	2. Stufe	$\xrightarrow{\log}$	1. Stufe
Potenzen, Wurzeln		Produkte, Brüche		Summen, Differenzen

Wechsel der Basis

Alle Logarithmen können bezüglich der gleichen Basis ausgedrückt werden.

$$\begin{array}{ccc} x = a^u & \longrightarrow & u = \log_a(x) \\ \big\downarrow \log_b & & \end{array}$$

$$\log_b(x) = \log_b(a^u) \underset{\text{3. Logarithmengesetz}}{=} u \log_b(a) = \log_a(x) \log_b(a)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\log_a(x) = \frac{1}{\log_b(a)} \log_b(x)}$$

Es heißt $\frac{1}{\log_b(a)}$ der <u>Modul</u> von a bezüglich der Basis b.

speziell: $\quad x = b \quad \longrightarrow \quad \log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)} \underbrace{\log_b(b)}_{1}$

Gebräuchliche Logarithmensysteme sind

- der <u>dekadische</u> Logarithmus: $\quad \log_{10}(x) \equiv \lg(x)$,
- der <u>natürliche</u> Logarithmus: $\quad \log_e(x) \equiv \ln(x)$.

Hierbei ist e die <u>Euler'sche Zahl</u>, $e = 2{,}718281828459045\ldots$ (später dazu mehr).

Häufigere Anwendung des Basiswechsels: $\quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Der dekadische Logarithmus

$10^n = x \quad , \quad n = \lg(x)$

$\rightarrow \quad \lg(10^n) = n \lg(10) = n$

$\left.\begin{array}{ll} \rightarrow \quad \lg(1) = 0 \quad , & \text{da } 10^0 = 1 \\ \rightarrow \quad \lg(10) = 1 \quad , & \text{da } 10^1 = 10 \end{array}\right\}$ Die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10 liegen zwischen 0 und 1.

Die Logarithmen der Zahlen zwischen 0 und 1 sind negativ, z. B.:

$$\lg(0{,}00213) = \lg(2{,}13 \cdot 10^{-3}) = \lg(2{,}13) + \lg(10^{-3})$$

$$= \underbrace{\lg(2{,}13)}_{\text{Mantisse}} \underbrace{-\,3}_{\text{Kernzahl}} < 0.$$

Beachte:

- Der Logarithmus von Null ist nicht definiert, da $10^b = 0$ keine reelle Lösung für b hat.
- Der Logarithmus negativer Zahlen ist (hier) nicht definiert, da $10^b = x$, $x < 0$, keine reelle Lösung für b hat.

Letztere Bemerkungen gelten für Logarithmen aller Basen.

Graphische Darstellung

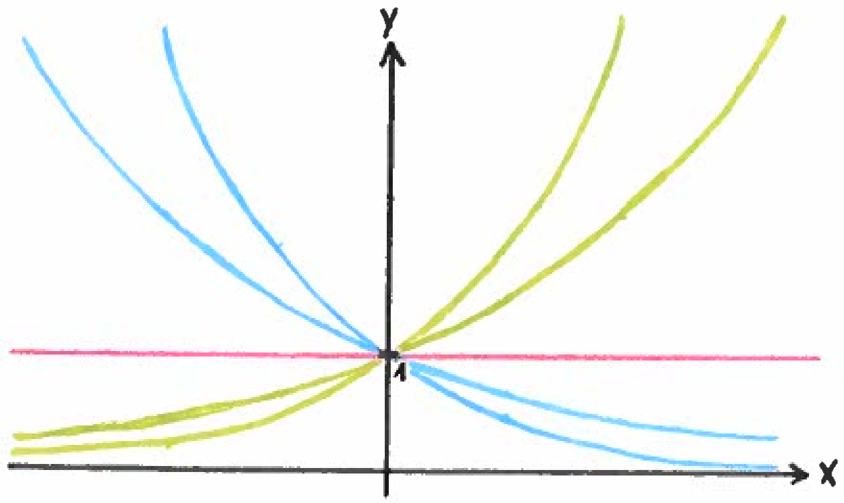
1.) Exponentialfunktionen $y = a^x$, $a > 0$

Unabhängig von a gilt $a^0 = 1$, d.h. alle Exponentialfunktionen schneiden die y-Achse im Punkt (0, 1).

$a > 1$: $y \xrightarrow{x \to -\infty} 0$, asymptotische Annäherung an die x-Achse von rechts

$a < 1$: $y \xrightarrow{x \to \infty} 0$, asymptotische Annäherung an die x-Achse von links

$a = 1$: $y = 1$ für alle x



rot: $a = 1$ grün: $a > 1$ blau: $a < 1$

Die Funktionen sind spiegelbildlich zur y-Achse, denn:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= a^x \\ f_2(x) &= \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x} = f_1(-x) \end{aligned}\right\} \text{ wenn } a > 1 \text{, dann } \frac{1}{a} < 1.$$

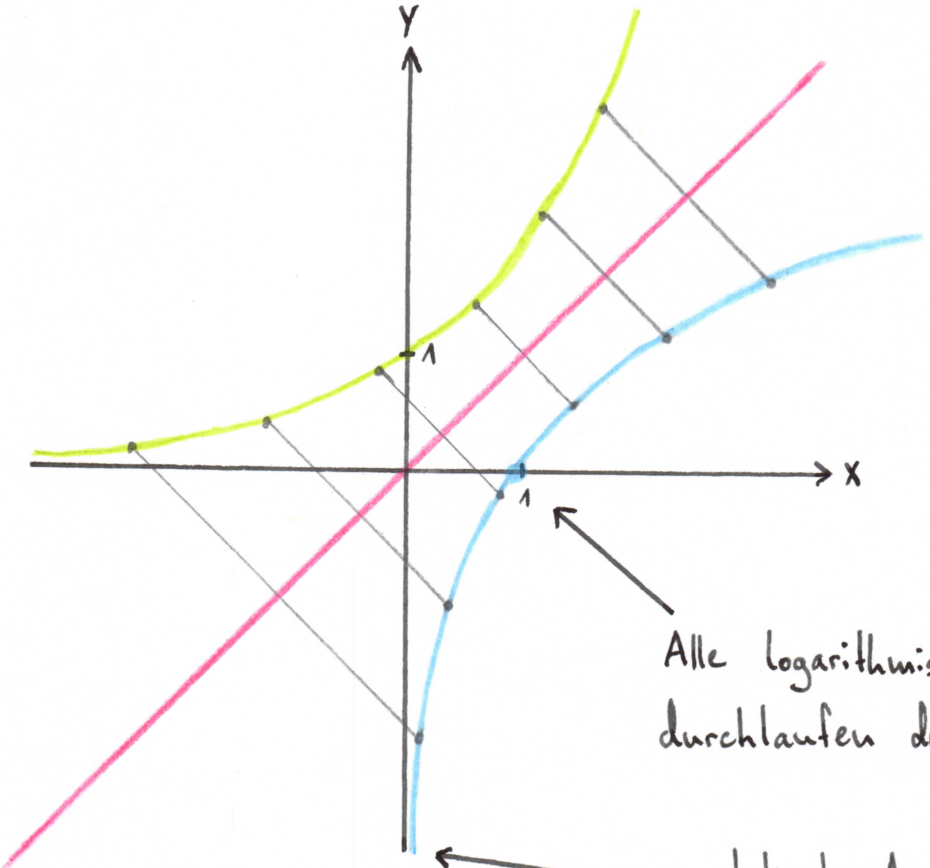
Sprich: Zu jeder „grünen" Funktion mit Basis a, findet man eine spiegelsymmetrische „blaue" Funktion mit Basis $\frac{1}{a}$.

2.) Logarithmenfunktionen, $y = \log_b(x)$, $b > 0$, $b \neq 1$

Da die Logarithmen die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen sind, erhält man sie durch Spiegelung an der Geraden $y = x$.

Für reelle y ist der Definitionsbereich $0 < x < \infty$.

Betrachte $a > 1$.



Alle logarithmischen Kurven durchlaufen den Punkt $(1,0)$.

asymptotische Annäherung an die y-Achse

rot: $y = x$
grün: Exponentialfunktion $y = a^x$
blau: Logarithmenfunktion $y = \log_a(x)$