Die Exponentialfunktion

Bisher haben wir Exponentialfunktionen im Allgemeinen behandelt. Als „Die Exponentialfunktion" wird gemeinhin eine Exponentialfunktion zur Basis e (Euler'sche Zahl) bezeichnet – kurz: <u>e-Funktion</u>.

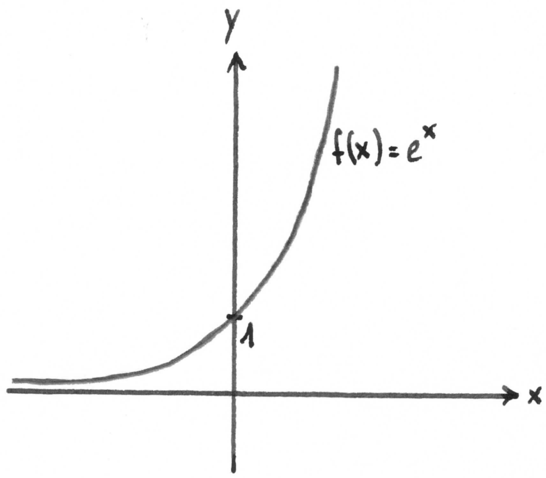
Sie dient der Beschreibung von Wachstum und Zerfall (z.B. Radioaktivität) und als Lösung von Differentialgleichungen (siehe Vorkurs).

allgemeine Form:

$$f(x) = A\, e^{cx} \equiv A \exp(cx) , \qquad A = \text{const} ,\ c = \text{const}$$

$c > 0$: exponentielles Wachstum
$c < 0$: exponentieller Zerfall

Besonderheit: Die e-Funktion ist proportional zu ihrem eigenen Anstieg.



Halbwertszeit

Wir betrachten exponentiellen Zerfall (mit der Zeit): Wann ist ein Anfangswert auf seine Hälfte zerfallen?
Wir nennen diesen Zeitraum τ.

$$f(x) = A\, e^{-ct} , \qquad c > 0$$

Es soll nun also $f(t_0 + \tau)$ halb so groß sein wie $f(t_0)$, wobei t_0 ein willkürlicher Zeitpunkt ist:

$$f(t_0+\tau) \overset{!}{=} \frac{1}{2} f(t_0)$$

$$\cancel{A} e^{-c(t_0+\tau)} = \frac{\cancel{A}}{2} e^{-ct_0} \qquad (A \neq 0)$$

$$\cancel{e^{-ct_0}}\, e^{-c\tau} = \frac{1}{2} \cancel{e^{-ct_0}} \qquad (e^x \neq 0)$$

$$-c\tau = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tau = \frac{\ln(2)}{c}}}$$

alternative Definitionen

1.) Definition als Reihe:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots$$

> **Bem.:** Die <u>Fakultät</u> $n!$ einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist definiert als:
>
> $$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$
>
> Außerdem: $0! := 1$

Man kann zeigen, dass die Reihenglieder für jeden Wert von x ab einer hinreichend hohen Ordnung immer kleiner werden. (Man sagt, die Reihe <u>konvergiert</u>.)

2.) Definition als Grenzwert:

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Diese Darstellung geht auf das Problem der stetigen Verzinsung nach Jakob Bernoulli (1654 - 1705) zurück:

„Eine Summe Geldes sei auf Zinsen angelegt, dass in den einzelnen Augenblicken ein proportionaler Teil der Jahreszinsen zum Kapital geschlagen wird."

Betrachte Anfangsguthaben A und Zinssatz von 100 %:

bei Verzinsung nach 1 Jahr: Guth. $= A + A = (1+1)A$

bei Verzinsung nach $\frac{1}{2}$ Jahr: Guth. $= \underbrace{A + \frac{1}{2}A}_{\text{1. Halbjahr}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(A + \frac{1}{2}A\right)}_{\text{2. Halbjahr}} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 A$

bei Verzinsung nach $\frac{1}{3}$ Jahr: Guth. $= \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 A$

bei Verzinsung nach $\frac{1}{n}$ Jahr: Guth. $= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n A$

$\longrightarrow$ bei Verzinsung in „einzelnen Augenblicken":

$$\text{Guth.} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n A = e \cdot A$$