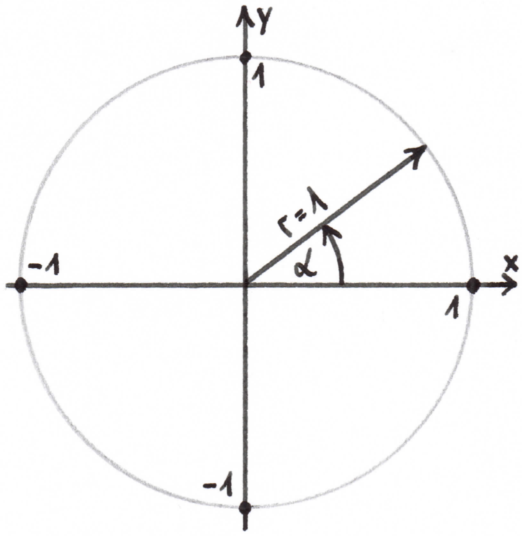
Trigonometrische Funktionen

Dieser Abschnitt widmet sich der Definition von Sinus- und Cosinusfunktionen sowie deren Eigenschaften.

Das Bogenmaß

Der Einheitskreis:



Wir betrachten die (reelle) Zahlenebene, in der alle Abstände in Einheit 1 gemessen werden, also <u>dimensionslos</u> sind.

Umfang des Einheitskreises:

$$u = 2\pi r = 2\pi$$

<u>Gradmaß</u>

$[\alpha] = {}^\circ$, Vollkreis: 360°

Messung in $\frac{1}{360}$ des Vollkreises

$\Rightarrow$

<u>Bogenmaß</u>

$[\alpha] = 1$, Vollkreis: 2π

Messung in Bruchteilen des Kreisumfangs

Übergang zwischen beiden Maßsystemen:

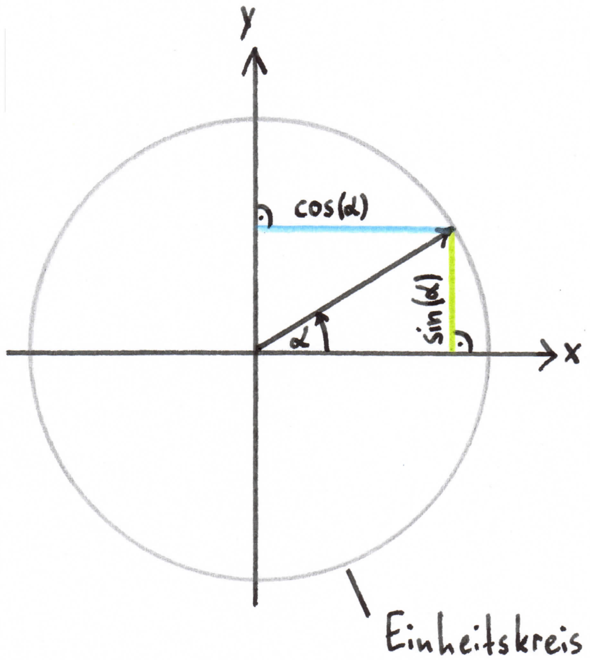
$$\frac{\alpha[\text{rad}]}{2\pi} = \frac{\alpha[\text{deg}]}{360^\circ}$$

deg : degrees
rad : Radiant

Beispiele:

$\alpha[\text{deg}]$	90°	180°	270°
$\alpha[\text{rad}]$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$

Definition der Winkelfunktionen



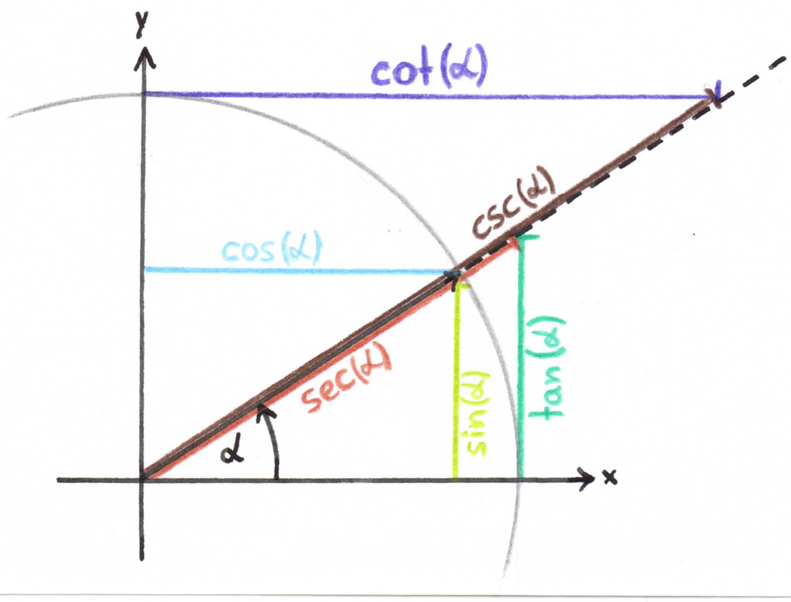
Alle Funktionen sind dimensionslos definiert.

Es gilt der trigonometrische Pythagoras:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

weitere trigonometr. Funktionen:

- Tangens: $\tan(\alpha) := \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
- Cotangens: $\cot(\alpha) := \dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \dfrac{1}{\tan(\alpha)}$
- Sekans: $\sec(\alpha) := \dfrac{1}{\cos(\alpha)}$
- Cosekans: $\csc(\alpha) := \dfrac{1}{\sin(\alpha)}$



Anhand der Konstruktion abzulesen sind

- die Wertebereiche der Funktionen:

$\sin(\alpha) \in [-1, 1]$ $\qquad$ $\tan(\alpha) \in (-\infty, \infty)$

$\cos(\alpha) \in [-1, 1]$ $\qquad$ $\cot(\alpha) \in (-\infty, \infty)$

- die Vorzeichen der Funktionen in den einzelnen Quadranten:

Quadr.	$\mathrm{sgn}(\sin\alpha)$	$\mathrm{sgn}(\cos\alpha)$	$\mathrm{sgn}(\tan\alpha)$	$\mathrm{sgn}(\cot\alpha)$
I	+	+	+	+
II	+	−	−	−
III	−	−	+	+
IV	−	+	−	−

- spezielle Werte der Funktionen:

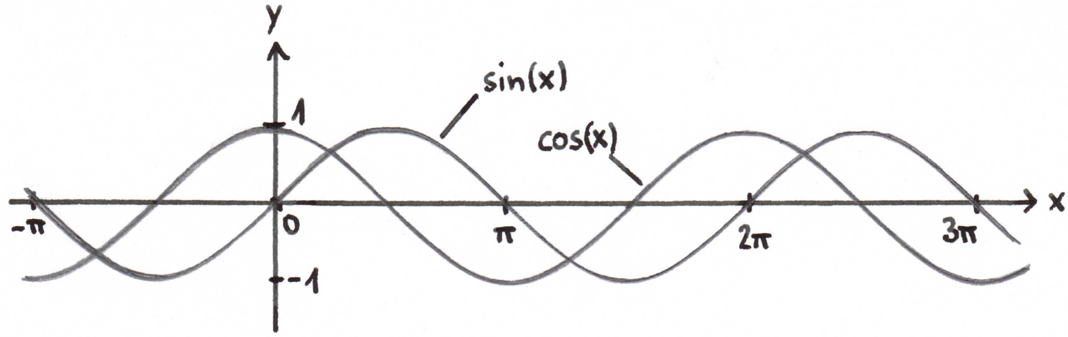
α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(\alpha)$	0	1	0	-1	0
$\cos(\alpha)$	1	0	-1	0	1
$\tan(\alpha)$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
$\cot(\alpha)$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$

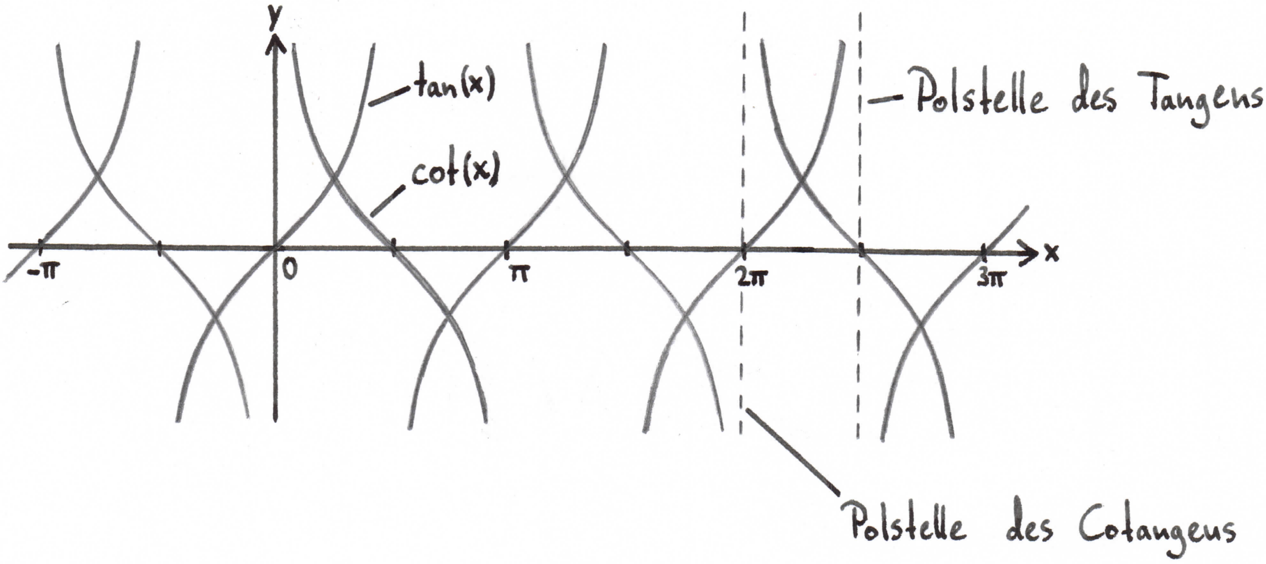
Graphische Darstellung der Winkelfunktionen

Wir erlauben alle reellen Zahlen x als Argumente in den Winkelfunktionen, d.h. der Definitionsbereich ist ganz $\mathbb{R}$ (f. $\sin(x)$ und $\cos(x)$).

Dabei sind die Funktionen periodisch:

$$\left.\begin{aligned} \sin(x) &= \sin(x+2\pi n), & \tan(x) &= \tan(x+\pi n), \\ \cos(x) &= \cos(x+2\pi n), & \cot(x) &= \cot(x+\pi n). \end{aligned}\right\} \quad n \in \mathbb{Z}$$





Symmetrie-Eigenschaften der Funktionen:

$\sin(-x) = -\sin(x)$, ungerade

$\cos(-x) = \cos(x)$, gerade

$\tan(-x) = -\tan(x)$, ungerade

$\cot(-x) = -\cot(x)$, ungerade

Umkehrfunktionen

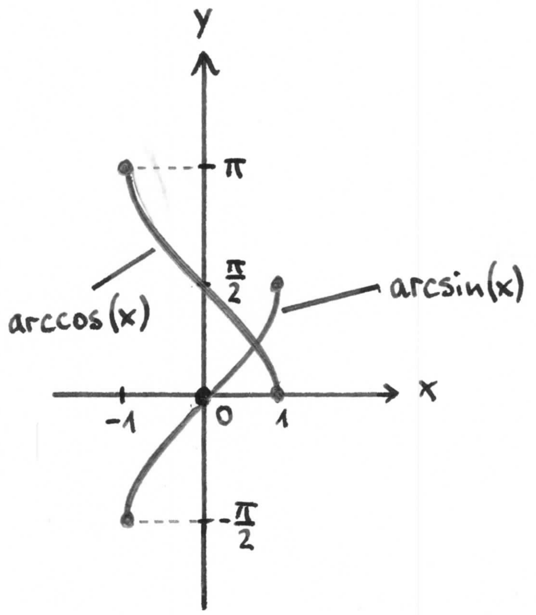
Definition:

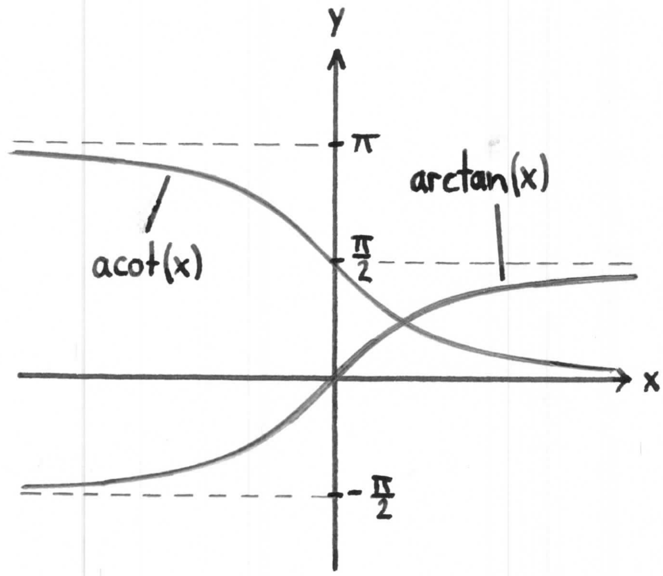
- Arkussinus: $\arcsin(\sin x) = x$,
- Arkuscosinus: $\arccos(\cos x) = x$,
- Arkustangens: $\arctan(\tan x) = x$,
- Arkuscotangens: $\operatorname{acot}(\cot x) = x$

Beachte, dass der Definitionsbereich der periodischen Winkelfunktionen eingeschränkt werden muss, damit die Umkehrfunktionen eindeutig sind. Wir beschränken die Argumente wie folgt:

$$\sin(x)\,, \qquad x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]$$
$$\cos(x)\,, \qquad x \in [0, \pi]$$
$$\tan(x)\,, \qquad x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$\cot(x)\,, \qquad x \in (0, \pi)\,.$$

graphische Darstellung:





Zu sehen sind die analytischen Eigenschaften:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\arctan(x)\right) = \pm\frac{\pi}{2} \qquad \text{und}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\operatorname{acot}(x)\right) = 0\,, \qquad \lim_{x \to -\infty} \left(\operatorname{acot}(x)\right) = \pi\,.$$

Definition durch Reihen

Ebenso wie die Exponentialfunktion lassen sich auch die trigonometrischen Funktionen als Reihen darstellen (oder definieren).

Der Zusammenhang der Winkelfunktionen mit der e-Funktion wird später klar werden.

Es gilt:

$$\left.\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots \end{aligned}\right\}$$

Hier sind wieder die Symmetrieeigenschaften zu erkennen!

Weiterhin:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \ldots$$

Die übrigen Reihen sehen etwas komplizierter aus und werden hier nicht aufgeführt.

Additionstheoreme

Für die Winkelfunktionen gelten die folgenden Additionstheoreme:

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y),$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y).$$

Das zweite Theorem folgt aus dem ersten. Ebenfalls folgen die Regeln für Tangens und Cotangens.

Auf einen Beweis wird an dieser Stelle verzichtet.