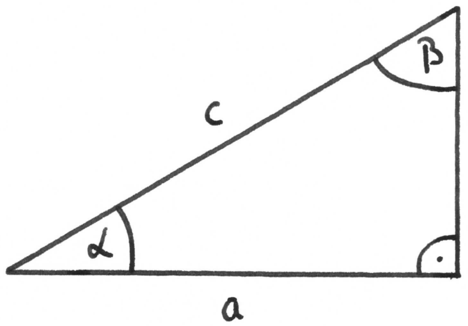
Ebene Trigonometrie

Das rechtwinklige Dreieck



a: Ankathete (von α)
b: Gegenkathete (von α)
c: Hypotenuse

Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$
Innenwinkel: $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

Winkelfunktionen:

$$\sin(\alpha) = \frac{b}{c}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{a}{c}$$

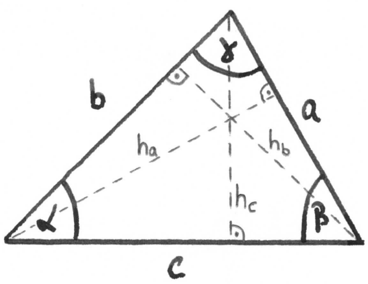
vergleiche mit Definition am Einheitskreis ($c=1$)

$$\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$$

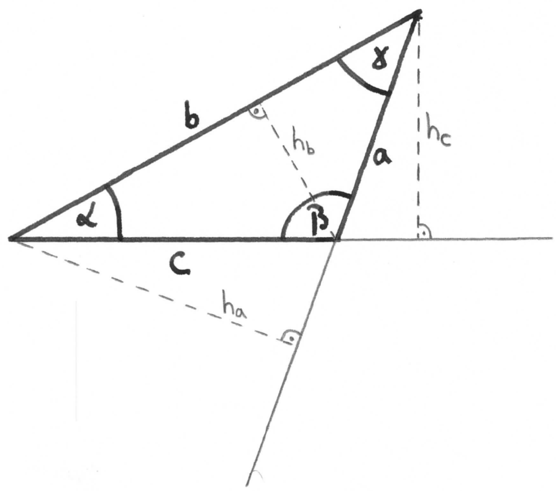
Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2}ab$

Das schiefwinklige Dreieck

$\beta < \frac{\pi}{2}$:



$\beta > \frac{\pi}{2}$:

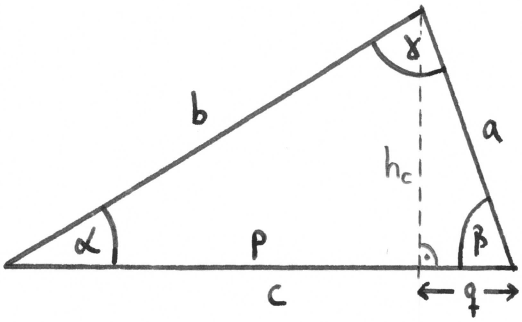


Innenwinkel: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$
Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma)$

in beiden Varianten ablesbar:

$$\left.\begin{aligned} h_a &= c \sin(\beta) = b \sin(\gamma) \\ h_b &= c \sin(\alpha) = a \sin(\gamma) \\ h_c &= a \sin(\beta) = b \sin(\alpha) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}} \quad \text{Sinussatz}$$

→ Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich zueinander wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel.



$(c = p + q)$

lesen ab:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= h_c^2 + q^2 \\ b^2 &= h_c^2 + p^2 \end{aligned}\right\} \quad a^2 = (b^2 - p^2) + q^2 \qquad q = c - p$$

$$= b^2 + c^2 - 2cp$$

außerdem: $p = b \cos(\alpha)$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)} \quad \text{Cosinussatz}$$

und zyklische Vertauschungen:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos(\beta),$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

→ Das Quadrat einer Seite ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, verringert um das doppelte Produkt dieser beiden Seiten mit dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

<u>Bem.:</u>

- Der Satz gilt natürlich auch für $\beta > \frac{\pi}{2}$.
- Der Satz stellt eine Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras dar.

Bsp.: Die Heron'sche Inhaltsformel (Heron von Alexandria)

Cosinussatz: $$\cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$1+\cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2+2bc}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} \underset{\uparrow}{=} 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

siehe Übung

Notation: $s \equiv \frac{1}{2}(a+b+c) \longrightarrow$ $$s-a = \frac{b+c-a}{2},$$

$$s-b = \frac{a+c-b}{2},$$

$$s-c = \frac{a+b-c}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2s\cdot\cancel{2}(s-a)}{\cancel{2}bc}$$

$$\rightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{s(s-a)}{bc}$$

$$\rightarrow \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{s(s-b)}{ac}$$

$$\rightarrow \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{s(s-c)}{ab}$$

Auf dem selben Weg folgt aus $1-\cos(\alpha) = \dfrac{a^2-b^2-c^2+2bc}{2bc}$:

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}, \quad \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{(s-a)(s-c)}{ac}, \quad \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{(s-a)(s-b)}{ab}.$$

Damit ergibt sich für den Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) \underset{\uparrow}{=} ab\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \cancel{ab}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{\cancel{ab}}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{\cancel{ab}}}$$

siehe Übung

$$= \underline{\underline{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}}$$