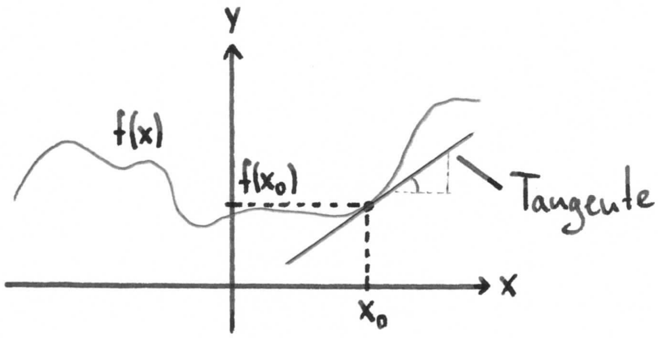
Grundlagen der Differentialrechnung (Ableiten)

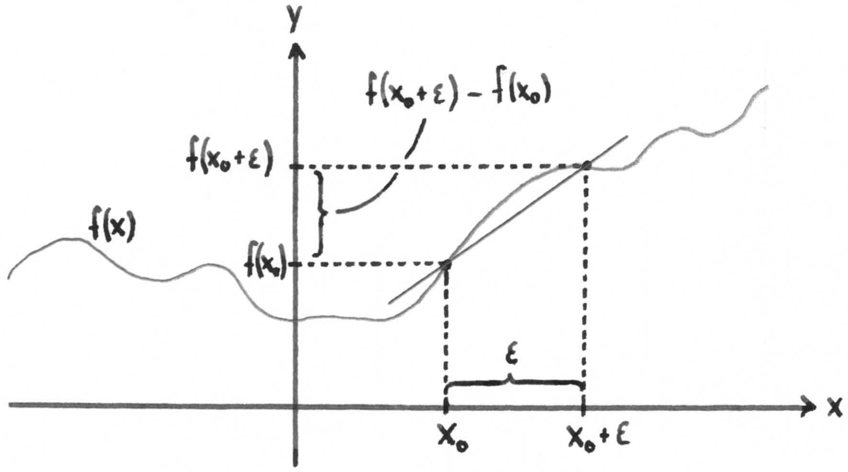
Wir stellen die Frage nach dem Anstieg einer beliebigen Funktion $f(x)$ an einem Punkt $x = x_0$.

Anstieg am Punkt x_0 heißt: Anstieg der Geraden, die am Punkte x_0 als Tangente angelegt wird



Da das in jedem beliebigen Punkt $x = x_0$ möglich ist, ist der Anstieg selbst wieder eine Funktion von x: $f'(x)$.

Konstruktion:



$$f'(x_0) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

Schreibweisen:

1. Ableitung $\quad f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx} = \left(\dfrac{df}{dx}\right)(x)$

2. Ableitung $\quad f''(x) = \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$

n. Ableitung $\quad f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$

speziell: $f(x) = a = \text{const} \longrightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}(a) = 0$

$f(x) = x \longrightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}(x) = 1$

allgemeine Eigenschaften

Linearität: $$\frac{d}{dx}\left(a\, f(x) + b\, g(x)\right) = a\frac{df}{dx} + b\frac{dg}{dx}$$

Produktregel (Leibniz-Regel):
$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \frac{df}{dx}\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{dg}{dx}$$

Kettenregel: $$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \underbrace{\left(\frac{df}{dg}\right)(g(x))}_{\text{„äußere Ableitung"}} \cdot \underbrace{\frac{dg}{dx}}_{\text{„innere Ableitung"}}$$

Bsp.: $f(x) = x\cdot g(x) + 7h(y(x))$ mit $y(x) = ax + b$

$$\frac{df}{dx} = \frac{dx}{dx}\cdot g(x) + x\cdot\frac{dg}{dx} + 7\left(\frac{dh}{dy}\right)(y)\cdot\frac{dy}{dx}$$
$$= g(x) + x\frac{dg}{dx} + 7a\left(\frac{dh}{dy}\right)(y)$$

Ableitung nach dem Argument von h, also nach $ax+b$, nicht nach x!

Ableitungen spezieller Funktionen

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = n\,x^{n-1} \longrightarrow \text{insbesondere: } \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x), \quad \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x), \quad \frac{d}{dx}\tan(x) = 1+\tan^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d}{dx}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \longrightarrow$$ Die Exponentialfunktion gibt ihren eigenen Anstieg an.

<u>Bsp.:</u> $$f(x) = \sin\left(\sqrt[n]{x^3}\right)\cdot\ln\left(\cos(x) - 3\,e^{x\ln(x)}\right)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\sin\left(\sqrt[n]{x^3}\right)\right]\cdot\ln\left(\cos(x)-3\,e^{x\ln(x)}\right)$$

$$+\sin\left(\sqrt[n]{x^3}\right)\frac{d}{dx}\ln\left(\underbrace{\cos(x)-3\,e^{x\ln(x)}}_{\equiv A(x)}\right)$$

$$= \ln A(x)\cdot\cos\left(\sqrt[n]{x^3}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\underbrace{\sqrt[n]{x^3}}_{=x^{\frac{3}{n}}}\right) + \sin\left(\sqrt[n]{x^3}\right)\frac{1}{A(x)}\cdot\frac{dA}{dx}$$

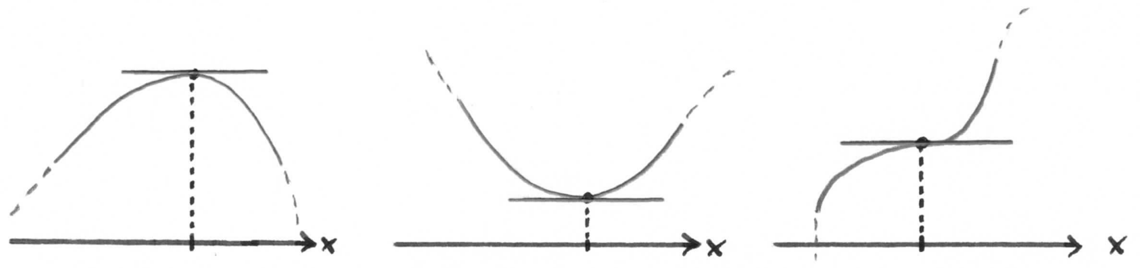
$$= \ln A(x)\cdot\cos\left(\sqrt[n]{x^3}\right)\cdot\frac{3}{n}\cdot x^{\frac{3}{n}-1} + \sin\left(\sqrt[n]{x^3}\right)\frac{1}{A(x)}\left[-\sin(x) - 3\frac{d}{dx}e^{x\ln(x)}\right]$$

$$x^{\frac{3}{n}-1} = x^{\frac{3-n}{n}} = \sqrt[n]{x^{3-n}} = \sqrt[n]{x^3}\cdot x^{-1}$$

$$= \frac{3\ln A(x)\,\sqrt[n]{x^3}}{n\,x}\cos\left(\sqrt[n]{x^3}\right) - \frac{\sin\left(\sqrt[n]{x^3}\right)}{A(x)}\left[\sin(x)+3\,e^{x\ln(x)}(\ln x+1)\right]$$

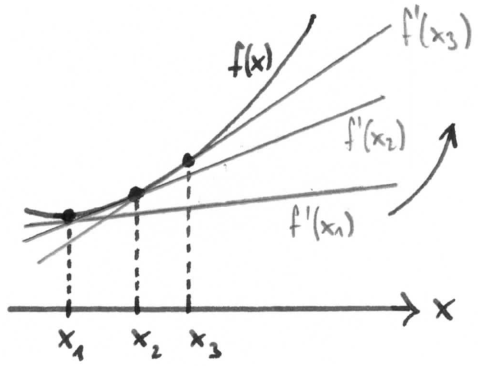
Kurvendiskussion

Verschwinden der Ableitung an einem Punkt, $f'(x_0) = 0$, bedeutet ein lokales Extremum (bzw. Sattelpunkt):



Maximum Minimum Sattelpunkt

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung gibt Auskunft über die Krümmung der Kurve:



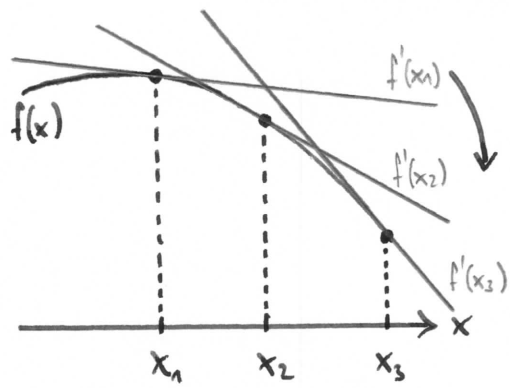
zunehmender Anstieg $f'(x)$

$\downarrow$

Anstieg des Anstiegs positiv, $f''(x) > 0$

$\downarrow$

Kurve $f(x)$ konvex



abnehmender Anstieg $f'(x)$

$\downarrow$

Anstieg des Anstiegs negativ, $f''(x) < 0$

$\downarrow$

Kurve $f(x)$ konkav