Die Methode der vollständigen Induktion

Eine Aussage ist für jede natürliche Zahl n richtig, wenn

(1) sie für $n=1$ richtig ist <u>und</u>

(2) aus der Richtigkeit der Aussage für eine willkürliche natürliche Zahl $n=k$ die Richtigkeit für $n=k+1$ folgt.

<u>Beweis</u>: Annahme: Eine Aussage sei <u>nicht</u> für jede natürliche Zahl gültig, <u>obwohl</u> (1) & (2) gelten.

Dann existiert ein m, sodass
- die Aussage für $n=m$ falsch ist und
- für $n<m$ richtig.

Aber: Die Aussage gilt für $n=1$. Also muss $m>1$ sein. Dann ist $m-1$ eine natürliche Zahl, für die die Aussage richtig ist, ohne es für die darauffolgende zu sein.

$\longrightarrow$ Widerspruch zu (2)

$\Longrightarrow$ Annahme falsch (Beweis durch Widerspruch) $\square$

Beispiele

1. $$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$; also $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{3}{4}$

Vermutung: $$S_n = \frac{n}{n+1}$$

(1) $n=1$: $S_1 = \frac{1}{2}$

(2) $n=k$: $S_k = \frac{k}{k+1} \longrightarrow$ Behauptung: $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$

Beweis: $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1}\left(k + \frac{1}{k+2}\right)$

$= \frac{1}{k+1} \frac{k^2+2k+1}{k+2} = \frac{(k+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(k+1)}(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$

q.e.d.

2. Summe der ersten n ungeraden Zahlen

$S_n = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)$; also $S_1 = 1$, $S_2 = 4$, $S_3 = 9$

Vermutung: $S_n = n^2$

(1) $n = 1$: $S_1 = 1$

(2) $n = k$: $S_k = k^2 \longrightarrow$ Behauptung: $S_{k+1} = (k+1)^2$

Beweis: $S_{k+1} = S_k + 2(k+1) - 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$

q.e.d.

3. Gauß'sche Summenformel

$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{m=1}^{n} m$

Vermutung: $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

(1) $n = 1$: $S_1 = 1$

(2) $n = k$: $S_k = \frac{k(k+1)}{2} \longrightarrow$ Behauptung: $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Beweis: $S_{k+1} = S_k + (k+1) = (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

q.e.d.

4. Summe der Quadratzahlen

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{m=1}^{n} m^2$$

Vermutung: $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(1) $n=1$: $S_1 = 1$

(2) $n=k$: $S_k = \frac{1}{6}\left[k(k+1)(2k+1)\right]$

$\longrightarrow$ Behauptung: $S_{k+1} = \frac{1}{6}\left[(k+1)(k+2)(2k+3)\right]$

Beweis:
$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}\left[k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2\right] \\ &= \frac{k+1}{6}\left[k(2k+1) + 6(k+1)\right] = \frac{k+1}{6}\left(2k^2 + 7k + 6\right) \end{aligned}$$

Polynomdivision:
$$\begin{array}{l} (2k^2 + 7k + 6) : (k+2) = 2k + 3 \\ \underline{-(2k^2 + 4k)} \\ \quad\quad\quad 3k + 6 \\ \quad\quad \underline{-(3k + 6)} \\ \quad\quad\quad\quad 0 \end{array}$$

q.e.d.

5.

$$S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \sum_{m=0}^{n} x^m$$

Vermutung: $S_n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$

(1) $n=0$: $S_0 = 1$, $n=1$: $S_1 = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$

(2) $n=k$: $S_k = \dfrac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$ $\longrightarrow$ Behauptung: $S_{k+1} = \dfrac{x^{k+2} - 1}{x - 1}$

Beweis: $S_{k+1} = S_k + x^{k+1} = \frac{x^{k+1}-1}{x-1} + x^{k+1}$

$$= \frac{x^{k+1}-1+(x-1)x^{k+1}}{x-1} = \frac{\cancel{x^{k+1}}-1+x^{k+2}-\cancel{x^{k+1}}}{x-1}$$

q.e.d.

6. Bernoulli'sche Ungleichung

Vermutung: $(1+\alpha)^n > 1+n\alpha \qquad (\alpha > -1,\ \alpha \neq 0,\ n > 1)$

(1) $n = 2$:

$(1+\alpha)^2$	$1+2\alpha$
$1+2\alpha+\alpha^2$	$1+2\alpha$

$\alpha^2 > 0$

(2) $n = k$: $(1+\alpha)^k > 1+k\alpha \quad (*)$

$\longrightarrow$ Behauptung: $(1+\alpha)^{k+1} > 1+(k+1)\alpha$

Beweis: $(1+\alpha)^{k+1} = (1+\alpha)^k(1+\alpha)$

mit $(*)$: $(1+\alpha)^k(1+\alpha) > (1+k\alpha)(1+\alpha)$, da $1+\alpha > 0$

$$\Rightarrow (1+\alpha)^{k+1} > 1+\alpha+k\alpha+k\alpha^2 = 1+(k+1)\alpha + \underbrace{k\alpha^2}_{>0}$$

$$> 1+(k+1)\alpha$$

q.e.d.