Arithmetische & geometrische Reihe

Folgen und Reihen

Eine Folge ist eine Liste nummerierter Objekte (endlich oder unendlich viele).

Schreibweise:

$$(a_k)_{k=1,\dots,n} \quad \text{oder} \quad (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

Folgen können definiert werden durch explizite Angabe der Folgenglieder, z.B.

$$(a_k)_{k=1,\dots,4} = (2,3,5,7),$$

$$\text{oder} \quad a_1 = 2,\; a_2 = 3,\; a_3 = 5,\; a_4 = 7,$$

oder durch eine (explizite oder rekursive) Bildungsvorschrift, z.B.

$$a_k = 2^k, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Eine Reihe ist eine Liste von Summen aus Folgengliedern, also

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \text{wobei} \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k. \longleftarrow \text{„Partialsummen"}$$

Eine Reihe ist selbst wieder eine Folge.

Bsp.: Sei $(a_k)_{k=1}^{4}$ die Folge der ersten 4 Primzahlen, also $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$.
Dann sind die Partialsummen gegeben als

$$s_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 = 2, \qquad s_2 = \sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2 = 5,$$

$$s_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3 = 10, \qquad s_4 = \sum_{k=1}^{4} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 17.$$

Also ist die Reihe:

$$(s_n)_{n=1}^{4} = (2, 5, 10, 17).$$

Arithmetische Reihen

Definition der arithmetischen Folge:

rekursiv: $a_{k+1} = a_k + d$ | d: Differenz

explizit: $a_k = a_0 + k \cdot d$ | a_0: Anfangsglied

Die Glieder einer arithmetischen Reihe sind die Partialsummen einer arithmetischen Folge:

$$s_0 = a_0$$
$$s_1 = a_0 + (a_0 + d)$$
$$s_2 = a_0 + (a_0 + d) + (a_0 + 2d)$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_0 + (a_0 + d) + \ldots + (a_0 + nd) = \sum_{k=0}^{n} (a_0 + kd)$$

Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass für das n-te Glied der Reihe gilt:

$$\boxed{s_n = (n+1)\left(a_0 + n \cdot \frac{d}{2}\right)}$$

(1) $n = 0$: $s_n = a_0$

(2) $n = k$: $s_k = (k+1)\left(a_0 + k\frac{d}{2}\right)$

$\longrightarrow$ Behauptung: $s_{k+1} = (k+2)\left(a_0 + (k+1)\frac{d}{2}\right)$

Beweis:

$$S_{k+1} = S_k + a_0 + (k+1)d = (k+1)a_0 + k(k+1)\frac{d}{2} + a_0 + (k+1)d$$

$$= (k+2)a_0 + (k+1)(k+2)\frac{d}{2} = (k+2)\left[a_0 + (k+1)\frac{d}{2}\right]$$

q.e.d.

Es lässt sich s_n auch durch a_n ausdrücken (Eliminierung von d):

$$a_n = a_0 + nd \longrightarrow nd = a_n - a_0$$

$$\Longrightarrow s_n = (n+1)\left(a_0 + \frac{a_n - a_0}{2}\right) = \underline{\frac{n+1}{2}(a_0 + a_n)}$$

Namensgebung:

$$\left.\begin{aligned} a_{k+1} &= a_0 + (k+1)d \\ a_{k-1} &= a_0 + (k-1)d \end{aligned}\right|_{+}$$

$$a_{k+1} + a_{k-1} = 2a_0 + 2kd = 2\underbrace{(a_0 + kd)}_{a_k}$$

$$\Longrightarrow \underline{a_k = \frac{1}{2}(a_{k+1} + a_{k-1})}$$

Die Glieder der arithmetischen Folge sind gleich dem arithmetischen Mittel (s.u.) ihrer Nachbarglieder.

Geometrische Reihen

Definition der geometrischen Folge:

rekursiv: $a_{k+1} = q \cdot a_k$ | q: Quotient

explizit: $a_k = q^k \cdot a_0$ | a_0: Anfangsglied

Die Glieder einer geometrischen Reihe sind die Partialsummen einer geometrischen Folge:

$$s_0 = a_0$$
$$s_1 = a_0 + q a_0 = (1+q) a_0$$
$$s_2 = a_0 + q a_0 + q^2 a_0 = (1+q+q^2) a_0$$
$$\vdots$$
$$s_n = (1+q+q^2+\dots+q^n) a_0 = a_0 \sum_{k=0}^{n} q^k$$

beachte:

$$q>0 \begin{cases} q>1: & \text{Die Glieder der Folge werden größer.} \\ q=1: & \text{Alle Glieder der Folge sind gleich.} \\ q<1: & \text{Die Glieder der Folge werden kleiner.} \end{cases}$$

$q<0$: Die Folge alterniert.

Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass für das n-te Glied der Reihe gilt:

$$\boxed{s_n = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}} \qquad (q \neq 1)$$

(1) $n = 0: \quad s_n = a_0$

(2) $n = k: \quad s_k = a_0 \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$

$\longrightarrow$ Behauptung: $\quad s_{k+1} = a_0 \frac{1-q^{k+2}}{1-q}$

Beweis:

$$s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = a_0 \frac{1-q^{k+1}}{1-q} + a_0 q^{k+1}$$

$$= \frac{a_0}{1-q}\left[1-q^{k+1} + (1-q)\, q^{k+1}\right] = \frac{a_0}{1-q}\left(1-\cancel{q^{k+1}} + \cancel{q^{k+1}} - q^{k+2}\right)$$

$$= a_0 \frac{1-q^{k+2}}{1-q} \qquad \text{q.e.d.}$$

Es lässt sich s_n auch durch das Endglied a_n ausdrücken (Eliminierung der Potenz):

$$a_n = a_0 q^n \quad \longrightarrow \quad q^n = \frac{a_n}{a_0}$$

$$\Longrightarrow \quad s_n = a_0 \frac{1-q\frac{a_n}{a_0}}{1-q} = \underline{\frac{a_0 - q a_n}{1-q}}$$

Namensgebung:

$$\left.\begin{aligned} a_{k+1} &= a_0 q^{k+1} \\ a_{k-1} &= a_0 q^{k-1} \end{aligned}\right|_{\times}$$

$$a_{k+1} \cdot a_{k-1} = a_0^2 q^{2k} = (a_0 q^k)^2 = a_k^2$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{a_k = \sqrt{a_{k+1} \cdot a_{k-1}}}$$

Die Glieder der geometr. Folge sind gleich dem geometrischen Mittel (s.u.) ihrer Nachbarglieder.

Bem. Für $0<q<1$ gilt $\lim_{n\to\infty}(q^{n+1})=0$. Demnach nimmt dann die unendliche geometrische Reihe einen Wert an,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Anders herum betrachtet haben wir damit eine Reihendarstellung der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \text{für} \quad 0<x<1$$

gefunden.

Einschub: arithmetisches & geometrisches Mittel

Es seien a_1, a_2 zwei reelle Zahlen.

- <u>arithmetisches Mittel</u> von a_1 und a_2: $\quad A = \frac{a_1 + a_2}{2}$
- <u>geometrisches Mittel</u> von a_1 und a_2: $\quad G = \sqrt{a_1 a_2}$

Es gilt: $\boxed{G \leq A}$

<u>Beweis:</u>

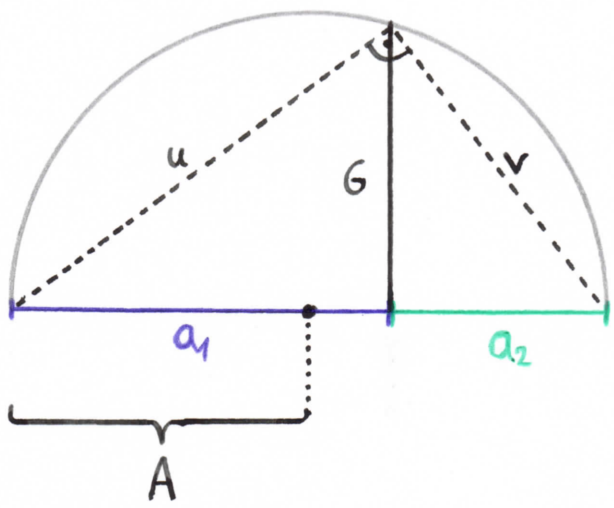
$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 4a_1a_2 \leq (a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 \leq a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 = (a_1 - a_2)^2$$

$\square$

geometrische Interpretation:



Thales-Kreis: $\quad u^2 + v^2 = (a_1 + a_2)^2$

$$G^2 + a_1^2 = u^2$$
$$G^2 + a_2^2 = v^2 \quad \Big| +$$

$$2G^2 + \cancel{a_1^2} + \cancel{a_2^2} = u^2 + v^2 = (a_1 + a_2)^2$$
$$= \cancel{a_1^2} + \cancel{a_2^2} + 2a_1a_2$$

$$\Rightarrow G = \sqrt{a_1 a_2}$$

→ Das arithmetische Mittel ist der Radius des Kreises mit Durchmesser $(a_1 + a_2)$.

→ Das geometrische Mittel ist die halbe Länge der Sehne, senkrecht zum Durchmesser, in dem Punkt, an dem a_1 und a_2 aneinanderstoßen.