Der binomische Satz

Der binomische Satz (auch: Binomialtheorem) ermöglicht die Entwicklung von Binomen $(a+b)^n$ in Potenzen von a und b, also das „Ausmultiplizieren".

Binomialkoeffizienten

Für zwei natürliche Zahlen $n, k \in \mathbb{N}_0$ ist der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$, sprich: „n über k", definiert als

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \quad .$$

Beachte, dass der Binomialkoeffizient nur von Null verschieden ist, wenn $k \leq n$.

<u>Bsp.</u>

$$\binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!} = 35 \; , \qquad \binom{10}{7} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{7!} = 120 ,$$

$$\binom{3}{5} = \frac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 0\cdot (-1)}{5!} = 0$$

Sofern $k \leq n$, kann man schreiben:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot \underbrace{\frac{(n-k)(n-k-1)\ldots 2\cdot 1}{(n-k)!}}_{1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad .$$

Offenbar ändert sich der Wert eines Binomialkoeffizienten nicht, wenn man k durch n-k ersetzt.

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad , \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{für } k \leq n}$$

Spezialfälle:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1\,,$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n\,,$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$$

Außerdem gilt die Rekursionsrelation

$$\boxed{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}\,,}$$

denn: $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{(k+1)!}$$

$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k+1)!}\left[(\cancel{k}+1) + (n-\cancel{k})\right]$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)\dots(n-k+1)}{(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}\,.$$

<u>Bem.</u>

- Das Produkt $n(n-1)\dots(n-k+1)$ wird auch als „fallende Faktorielle" oder „absteigendes Pochhammer-Symbol" bezeichnet und mit $[n]_k$, $(n)_k$ oder $n^{\underline{k}}$ abgekürzt.

- Eine Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten für reelle n (und natürliche k) ist mit oben gegebener Definition ohne Weiteres möglich. Beachte, dass $\binom{n}{k}$ dann auch für $k>n$ von Null verschiedene Werte annimmt, bspw.

$$\binom{1/2}{4} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!} = -\frac{5}{128}\,.$$

- Die Binomialkoeffizienten können (sowohl in n als auch in k) als Folge aufgefasst werden; sie ist weder arithmetisch noch geometrisch.

Der binomische Satz

$a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

(1) $n = 0$: $\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$

$n = 1$: $\binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b$

$n = 2$: $\binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(2) $n = l$: $(a+b)^l = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} a^{l-k} b^k$

$\longrightarrow$ Behauptung: $(a+b)^{l+1} = \sum_{k=0}^{l+1} \binom{l+1}{k} a^{l+1-k} b^k$

__Beweis:__

$$(a+b)^{l+1} = (a+b)^l (a+b) = \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} a^{l-k} b^k (a+b)$$

$$= \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} a^{l+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} a^{l-k} b^{k+1}$$

Indextransformation $m = k+1$, $k = m-1$:

$\sum_{m=1}^{l+1} \binom{l}{m-1} a^{l+1-m} b^m$, Umbenennung $m \to k$

$$= \binom{l}{0} a^{l+1} + \sum_{k=1}^{l} \left[\binom{l}{k} + \binom{l}{k-1} \right] a^{l+1-k} b^k + \binom{l}{l} b^{l+1}$$

$$= a^{l+1} + \sum_{k=1}^{l} \binom{l+1}{k} a^{l+1-k} b^k + b^{l+1}$$

für $k = 0$: $\binom{l+1}{0} a^{l+1} = \binom{l}{0} a^{l+1} = a^{l+1}$

$k = l+1$: $\binom{l+1}{l+1} b^{l+1} = \binom{l}{l} b^{l+1} = b^{l+1}$

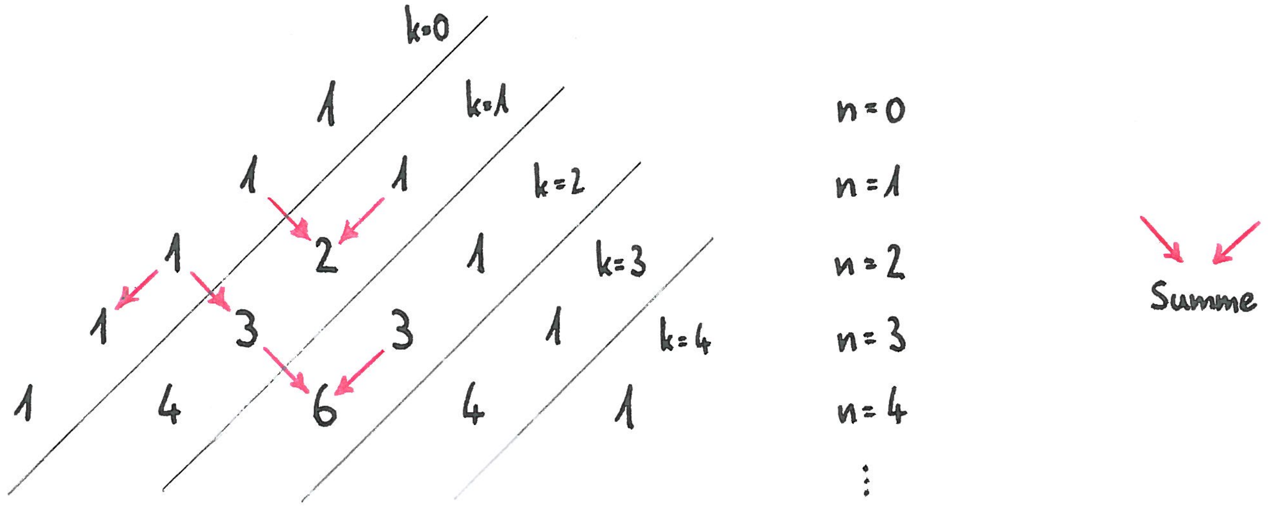
$$= \sum_{k=0}^{l+1} \binom{l+1}{k} a^{l+1-k} b^k$$

q.e.d.

Pascal'sches Dreieck

$\binom{n}{k}$ mit $k = 0, 1, 2, \dots, n$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc|c}
 & & & & & k=0 & & & & & & & & \underline{n} \\
 & & & & & \binom{0}{0} & & k=1 & & & & & & 0 \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & k=2 & & & & & 1 \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & k=3 & & & & 2 \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & k=4 & & & 3 \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & k=5 & & 4 \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & & 5
\end{array}
$$



beachte: – Definition des Pascal'schen Dreiecks durch die Rekursionsrelation für Binomialkoeffizienten,

– Symmetrie des Dreiecks unter $k \longmapsto n-k$

Mit Hilfe des Pascal'schen Dreiecks können Binome unmittelbar ausmultipliziert werden, bspw. (siehe letze Zeile):

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 .$$

<u>Bem.</u>

- Der binomische Satz liefert uns insbesondere eine Reihendarstellung der Funktion $f_n(x) = (1+x)^n$:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots .$$

- Durch Verallgemeinerung auf nicht-ganze n können weitere nützliche Reihendarstellungen gefunden werden, bspw.

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^k \qquad \text{(Newton'sches Binomialtheorem)} .$$

- Es existiert auch ein sogenanntes Multinomialtheorem für Ausdrücke der Form

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_j)^n .$$