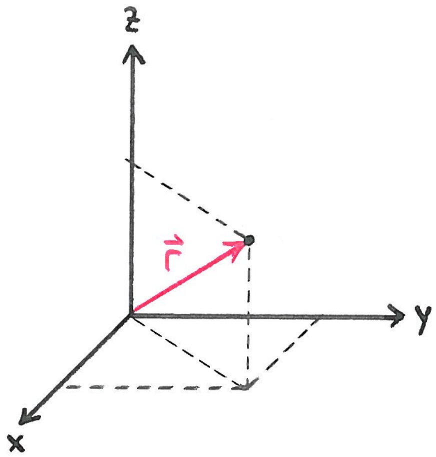
Rechnen mit Vektoren und Matrizen

Vektoren und Matrizen kommen in allen Teilbereichen der Physik fundamentale Rollen zu!

Hier betrachten wir den dreidimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$, bestehend aus Punkten, die durch Angabe ihrer Koordinaten x, y und z in einem kartesischen Koordinatensystem gekennzeichnet sind.

Ziehen wir eine Verbindungslinie vom Koordinatenursprung zu einem Punkt mit Koordinaten $(x;y;z)$, dann entspricht das dem <u>Ortsvektor</u> dieses Punktes und wir schreiben



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{r} \in \mathbb{R}^3 .$$

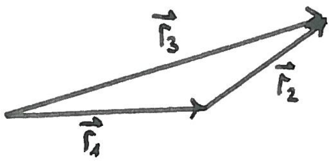
Vorteil einer solchen vektoriellen Größe ist, dass sie neben ihrem Betrag auch Information über die Richtung (inkl. Orientierung) enthält.

Grundlagen der Vektorrechnung

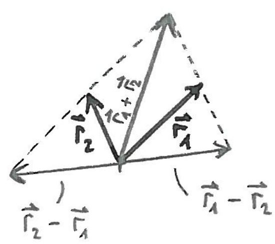
Offenbar können Vektoren <u>addiert</u> werden,

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}_3 = \vec{r}_2 + \vec{r}_1 .$$

anschaulich:

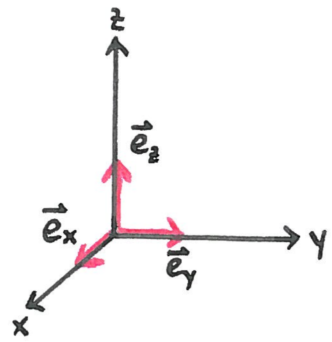


oder



Jeder dreidimensionale Vektor kann als Linearkombination dreier Basisvektoren geschrieben werden,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z \;;$$



damit gilt bei Addition:

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 + x_2)\,\vec{e}_x + (y_1 + y_2)\,\vec{e}_y + (z_1 + z_2)\,\vec{e}_z \,.$$

Der Betrag (die Länge) eines Vektors ist definiert als

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0 \qquad \text{(dreidimensionaler Pythagoras).}$$

speziell:

- Basisvektoren
  $|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$
- Nullvektor
  $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\vec{0}| = 0$

Es gilt die Dreiecksungleichung, $\quad |\vec{r}_1 + \vec{r}_2| \leq |\vec{r}_1| + |\vec{r}_2|$.

Vektoren können mit Skalaren („Zahlen" ohne Richtung, hier: Elemente des $\mathbb{R}$) multipliziert werden.

Jedem Vektor kann ein Einheitsvektor zugeordnet werden,

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \,, \qquad \text{sodass} \quad |\vec{e}_r| = 1 \,.$$

Das Vektorprodukt

Das Vektorprodukt (auch: Kreuzprodukt) bietet eine Möglichkeit, Vektoren miteinander zu multiplizieren, im Sinne eines äußeren Produktes („Vektor mal Vektor gleich Vektor").

Schreibweise:
$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \vec{r}_3$$

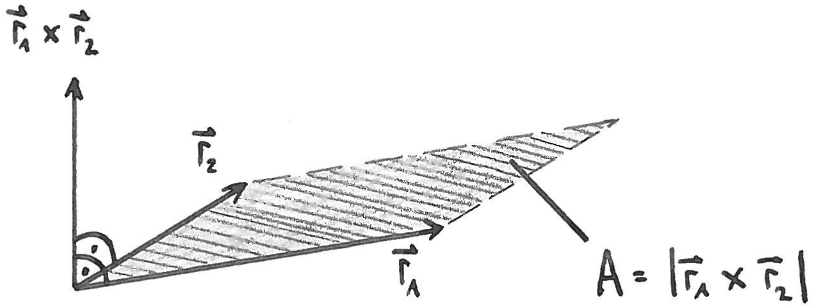
Konstruktion:
$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Das Vektorprodukt $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ steht senkrecht sowohl auf $\vec{r}_1$ als auch auf $\vec{r}_2$ und seine Richtung ist rechtsdrehend positiv (→ Rechte-Hand-Regel, Korkenzieher-Regel).

Für den Betrag des Vektorproduktes gilt:

$$|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2| = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2| \cdot \sin \sphericalangle(\vec{r}_1, \vec{r}_2) .$$

Der Betrag des Vektorproduktes ist gleich dem Flächeninhalt des durch die Vektoren aufgespannten Parallelogramms.



Beachte: Das Vektorprodukt kann in dieser Form nur in 3 Dimensionen existieren.

algebraische Eigenschaften: Das Vektorprodukt ist...

- nicht kommutativ, $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$,

  dafür <u>anti-kommutativ</u>: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ $(\Rightarrow \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0})$;

- nicht assoziativ, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$;

- distributiv, $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Eine wichtige algebraische Eigenschaft ist die <u>Jacobi-Identität</u>,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0.$$

Vektorprodukte der Basisvektoren:

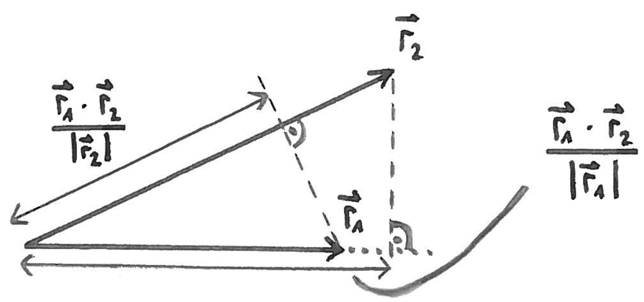
$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$

Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist eine Projektion zweier Vektoren aufeinander und stellt ein inneres Produkt dar („Vektor mal Vektor gleich nicht-Vektor"), da es ein Skalar – hier aus $\mathbb{R}$ – ergibt.

Es ist

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 .$$



→ Stehen zwei Vektoren senkrecht auf einander, dann ist ihr Skalarprodukt Null,

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

→ Der Nullvektor steht senkrecht auf allen Vektoren.

→ Der Betrag eines Vektors kann mit Hilfe des Skalarproduktes geschrieben werden,

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \,.$$

Das Skalarprodukt kann auch geschrieben werden als

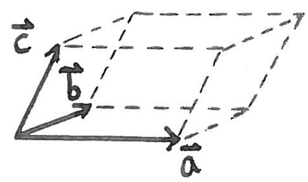
$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = |\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \,.$$

algebraische Eigenschaften: Das Skalarprodukt ist...

- kommutativ, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- nicht assoziativ[1], $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$;
- distributiv, $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Mit Hilfe von Skalar- und Vektorprodukt kann das Volumen des durch drei Vektoren aufgespannten Spates berechnet werden (<u>Spatprodukt</u>):

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$



1: Assoziativität kann hier gar nicht vorliegen, da es sich um ein inneres Produkt handelt; es existiert kein Skalarprodukt aus drei Faktoren.

Lineare Unabhängigkeit

Eine Menge von Vektoren $\{\vec{a}_i \in \mathbb{R}^3\}$ heißt linear unabhängig, wenn sich keiner der Vektoren $\vec{a}_i$ als Linearkombination der übrigen Vektoren $\vec{a}_j$, $j \neq i$, schreiben lässt.

Eine Menge von Vektoren heißt linear abhängig, wenn sie nicht linear unabhängig ist.

Anders gesagt: Lineare Abhängigkeit liegt genau dann vor, wenn der Nullvektor als Linearkombination

$$\vec{0} = \sum_i \alpha_i \vec{a}_i$$

geschrieben werden kann, ohne dass alle α_i Null sind.

Feststellungen:

- Im dreidimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ können nicht mehr als drei Vektoren linear unabhängig sein.
- Vektoren, die in einer Ebene liegen, sind linear abhängig, sofern es mehr als zwei sind.
- Enthält eine Menge von Vektoren den Nullvektor, dann ist sie linear abhängig.
- Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren Null, dann sind diese beiden Vektoren linear unabhängig, sofern keiner der beiden der Nullvektor ist.
- Die Basisvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ sind linear unabhängig.

<u>Bsp.</u> Die Vektoren $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, da $\vec{r}_1 - \frac{1}{2}\vec{r}_2 + \vec{r}_3 = \vec{0}$.

Vorbetrachtung: Drehungen

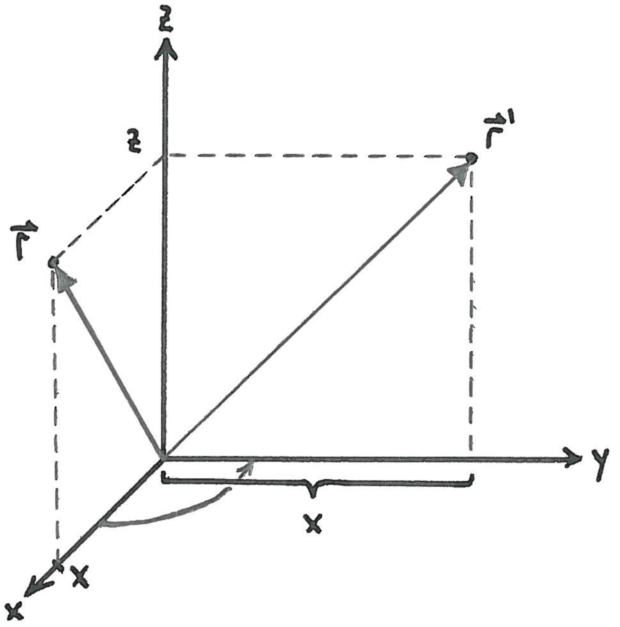
Bisher wurden Addition/Subtraktion sowie Skalar- und Vektormultiplikation von Vektoren eingeführt.

Frage: Welche Operation muss angewandt werden, um die Richtung eines vorgegebenen Vektors zu ändern (ohne seine Länge zu verändern)? Wie kann man einen Vektor drehen?

Eine Drehung ist charakterisiert durch

1. eine feste Achse, um die gedreht wird,
2. einen Drehwinkel.

Betrachten wir zunächst einen Vektor $\vec{r}$, der von der x-z- in die y-z-Ebene, d.h. um einen Winkel von $\alpha = \frac{\pi}{2}$ um die z-Achse, gedreht werden soll:

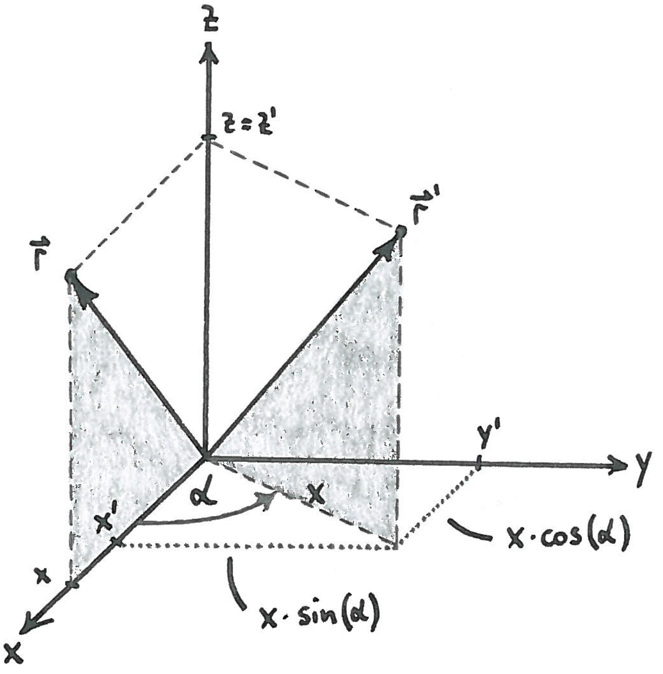


$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \vec{r}' = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ $\vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ausgedrückt durch die „ursprünglichen" Koordinaten x, y, z:

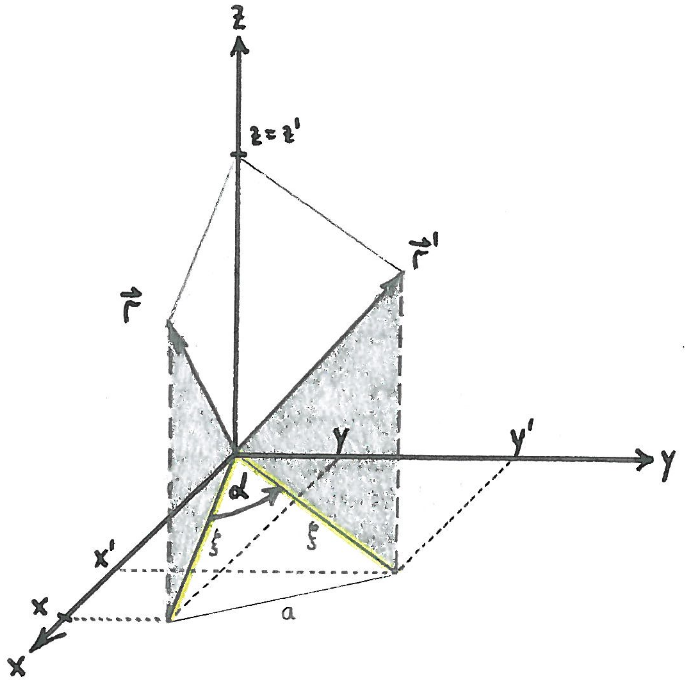
$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} 0 \cdot x + 0 \cdot z \\ 1 \cdot x + 0 \cdot z \\ 0 \cdot x + 1 \cdot z \end{pmatrix}$$

Drehung eines Vektors aus der x-z-Ebene in eine beliebige Ebene:



$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} x\cos\alpha \\ x\sin\alpha \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot x & + 0 \cdot z \\ \sin\alpha \cdot x & + 0 \cdot z \\ 0 \cdot x & + 1 \cdot z \end{pmatrix}$$

Drehung eines Vektors aus einer beliebigen Ebene in eine beliebige Ebene:



lesen ab:

$$x^2 + y^2 = \xi^2$$

$$x'^2 + y'^2 = \xi^2$$

$$a^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$$

Kosinussatz: $a^2 = \xi^2 + \xi^2 - 2\xi\cdot\xi\cdot\cos\alpha$

$$= 2\xi^2(1-\cos\alpha)$$

$$\cancel{2}\xi^{\cancel{2}} - 2xx' - 2yy' = \cancel{2}\xi^2(\cancel{1} - \cos\alpha)$$

$\longrightarrow$ quadratisches Gleichungssystem in x' und y':

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \qquad (1)$$

$$xx' + yy' = (x^2+y^2)\cos\alpha \qquad (2)$$

Einschub: Lösung des Gleichungssystems

Auflösen von (2) nach y':

$$y' = \frac{(x^2+y^2)\cos\alpha - xx'}{y} \qquad (*)$$

in (1): $$x'^2 + \frac{(x^2+y^2)^2\cos^2\alpha + x^2x'^2 - 2xx'(x^2+y^2)\cos\alpha}{y^2} = x^2+y^2$$

$$0 = \left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)x'^2 - \frac{2x(x^2+y^2)\cos\alpha}{y^2}\,x' - (x^2+y^2)\left(1-\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\cos^2\alpha\right)$$

$$0 = x'^2 - 2x\cos\alpha\, x' - \left(y^2 - (x^2+y^2)\cos^2\alpha\right)$$

$$\longrightarrow \quad x'_{1/2} = x\cos\alpha \pm \sqrt{\cancel{x^2\cos^2\alpha} + y^2 - (\cancel{x^2}+y^2)\cos^2\alpha}$$

$$= x\cos\alpha \pm y\sqrt{\underbrace{1-\cos^2\alpha}_{\sin^2\alpha,\ \text{trigonom. Pythagoras}}} = \underline{x\cos\alpha \pm y\sin\alpha}$$

in (*): $$y' = \frac{\cancel{x^2}+y^2}{y}\cos\alpha - \frac{x^2}{\cancel{y}}\cancel{\cos\alpha} \mp x\sin\alpha = \underline{y\cos\alpha \mp x\sin\alpha}$$

Das Gleichungssystem hat die beiden Lösungspaare $x' = x\cos\alpha \pm y\sin\alpha$, $y' = y\cos\alpha \mp x\sin\alpha$; für Übereinstimmung mit dem Fall $y=0$ (s. oben) muss das untere Vorzeichen gewählt werden.

$$\longrightarrow \quad \vec{r}\,' = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot x - \sin\alpha\cdot y + 0\cdot z \\ \sin\alpha\cdot x + \cos\alpha\cdot y + 0\cdot z \\ 0\cdot x + 0\cdot y + 1\cdot z \end{pmatrix}$$

Es ist jetzt an der Zeit, eine neue Klasse an Objekten einzuführen, die nach einem noch zu erlassenden Gesetz mit Vektoren multipliziert werden können – wir nennen sie Matrizen.

Ein Repräsentant dieser Klasse ist die Matrix, die einen Vektor um einen Winkel α um die z-Achse dreht:

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit können wir schreiben $\vec{r}\,' = R_z(\alpha) \cdot \vec{r}$ und das Gesetz über die Multiplikation einer Matrix an einen Vektor ablesen:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y \\ \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y \\ z \end{pmatrix}.$$

„Zeile mal Spalte"

In gleicher Weise können auch die Drehmatrizen um die x- und y-Achse konstruiert werden:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Bem.
- Jede beliebige Drehung eines Vektors im dreidimensionalen Raum kann aus Drehungen um die Koordinatenachsen, also aus den Matrizen R_x, R_y und R_z zusammengesetzt werden.
- Die Hintereinanderausführung mehrerer Drehungen kann als Produkt der Drehmatrizen ($\rightarrow$ später) geschrieben werden.

Grundlagen der Matrix-Rechnung

Eine Matrix A ist eine Zusammenfassung von Elementen a_{ij} in Form einer Tabelle (hier: zweidimensional).

Eine $(m \times n)$-Matrix besitzt m Zeilen und n Spalten und das Element a_{ij} befindet sich in der i-ten Zeile der j-ten Spalte ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$). Man schreibt:

$$A = (a_{ij}) = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n \text{ Spalten}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}}\right\} m \text{ Zeilen} \quad , \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

speziell:
- Jeder Spaltenvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ kann als $(n \times 1)$-Matrix aufgefasst werden.
- Eine $(n \times n)$-Matrix heißt <u>quadratische Matrix</u>.
- Hat eine quadratische Matrix nur Einträge auf der Hauptdiagonalen, $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$, dann heißt sie <u>Diagonalmatrix</u>. Man schreibt kurz:

$$A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}).$$

- Die Matrix $\mathbb{1}_n = \mathrm{diag}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n \text{ mal}})$ heißt <u>Einheitsmatrix</u> / Einsmatrix.

Eine Matrix A kann mit einem Skalar $k \in \mathbb{R}$ multipliziert werden,

$$k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \cdots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \cdots & k \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \cdots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Zwei Matrizen A, B können addiert/subtrahiert werden,

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die <u>transponierte Matrix</u> ergibt sich durch Vertauschung von Zeilen und Spalten (bzw. Spiegelung an der Diagonalen),

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$\longrightarrow$ Transponieren verwandelt eine $(m \times n)$-Matrix in eine $(n \times m)$-Matrix.

$\longrightarrow$ Transponieren verwandelt einen Spaltenvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ in einen Zeilenvektor $x^T = (x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n)$.

$\longrightarrow$ Eine Matrix heißt <u>symmetrisch</u>, wenn gilt $A^T = A$; eine Matrix heißt <u>antisymmetrisch</u>, wenn gilt $A^T = -A$.

$\Rightarrow$ Jede Diagonalmatrix ist symmetrisch.

Als <u>Spur</u> (engl.: trace) einer quadrat. Matrix bezeichnet man die Summe der Diagonalelemente, $\quad tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Bsp.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Summe:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^T = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A + B$$

$\Rightarrow$ $A+B$ symmetrisch

$$\mathrm{tr}(A+B) = 4\alpha + 2 = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$

Differenz:

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 2\beta & 0 \\ -2\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-B)^T = \begin{pmatrix} 0 & -2\beta & 0 \\ 2\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -(A-B)$$

$\Rightarrow$ $A-B$ antisymmetrisch

$$\mathrm{tr}(A-B) = 0 = \mathrm{tr}(A) - \mathrm{tr}(B)$$

Für die Matrix $A+B$ kann geschrieben werden

$$A + B = 2\,\mathrm{diag}(\alpha, \alpha, 1).$$

Die Matrixmultiplikation

Wir möchten ein assoz. Produkt von Matrizen definieren.

Definition: Sei $A = (a_{ij})$ eine $(m \times n)$-Matrix und sei $B = (b_{ij})$ eine $(n \times a)$-Matrix.

Dann ist das Produkt $A \cdot B = C$ eine $(m \times a)$-Matrix $C = (c_{ij})$ mit Einträgen

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad ; \quad i = 1, \dots, m \; ; \quad j = 1, \dots, a \,.$$

Das heißt: Es ergibt sich das Element in i-ter Zeile und j-ter Spalte der resultierenden Matrix, indem die Elemente der i-ten Zeile der ersten Matrix mit denen der j-ten Spalte der zweiten Matrix multipliziert und aufsummiert werden.

Bspw. für (3×3)-Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + & \dots \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + & \dots \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + & \dots \end{pmatrix}$$

Wichtig ist, dass die Spaltenzahl der ersten Matrix gleich der Zeilenzahl der zweiten Matrix ist.

Bsp.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 0 + 1 & 1 \cdot 7 + 0 + 0 & 1 + 0 + 1 \\ 2 \cdot 3 + 2 + (-1) & 2 \cdot 7 + 0 + 0 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + (-1) \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 0 & 1 \cdot 7 + 0 + 0 & 1 + 3 \cdot 5 + 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 7 & 14 & 6 \\ 9 & 7 & 16 \end{pmatrix}$$

Man kann das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ auffassen als das Produkt des Transponierten von $\vec{r}_1$ mit $\vec{r}_2$:

$$(\vec{r}_1)^T \cdot (\vec{r}_2) = (x_1 \;\; y_1 \;\; z_1) \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \,.$$

Die Einheitsmatrix ist das Einselement der Matrixmultiplikation,

$$A \cdot \mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n \cdot A = A \,, \qquad A:\ (n\times n)\text{-Matrix}.$$

algebraische Eigenschaften: Matrixmultiplikation ist...

- nicht kommutativ, $A \cdot B \neq B \cdot A$;
- assoziativ, $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \equiv A \cdot B \cdot C$;
- distributiv, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Die Determinante

Die Determinante ordnet jeder quadratischen Matrix eine (reelle) Zahl zu.

Definition: Die Determinante einer (2×2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist definiert als

$$\det(A) := a \cdot d - c \cdot b \,.$$

Die Determinante einer $(n\times n)$-Matrix kann mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes bestimmt werden, wobei man die Berechnung auf Determinanten von (2×2)-Matrizen zurückführt.

<u>Bsp.</u> (3×3)-Matrix

Um die Determinante einer (3×3)-Matrix zu bestimmen, entwickelt man nach einer (beliebigen) Zeile oder Spalte, wobei jeder Koeffizient a_{ij} mit derjenigen Unterdeterminante multipliziert wird, die durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht, und ein alternierendes Vorzeichen nach dem Muster

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

trägt; anders gesagt: das Vorzeichen $(-1)^{i+j}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$ <u>alternative Schreibweise:</u> $\det(A) \equiv |A|$

$$\det(A) = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Streichung von a_{11}:
$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
zu a_{11} gehörige Unterdeterminante

Streichung von a_{12}:
$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix}$$
zu a_{12} gehörige Unterdeterminante

Hier wurde nach der ersten Zeile entwickelt.

Streichung von a_{13}:
$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}$$
zu a_{13} gehörige Unterdeterminante

Also: $$\det(A) = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Wir hätten genauso nach bspw. der zweiten Spalte entwickeln können:

$$\det(A) = -a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})$$

Praktisch ist, immer nach derjenigen Zeile oder Spalte zu entwickeln, welche die meisten Nullen enthält.

ein Zahlenbeispiel:

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 0 - 4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -4(56 - 9) + 5(14 - 3) = -188 + 55 = \underline{\underline{-133}}$$

Eigenschaften von Determinanten:

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$, wenn $k \in \mathbb{R}$ und A: $(n \times n)$-Matrix
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(\mathbb{1}_n) = 1$

Bsp. Spatprodukt

Das Volumen des durch die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$ aufgespannten Spates kann als Determinante einer aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gebildeten Matrix geschrieben werden,

$$V = \left| \det \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} \right| .$$

Denn:

$$\left[\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$= c_x (a_y b_z - a_z b_y) - c_y (a_x b_z - a_z b_x) + c_z (a_x b_y - a_y b_z)$$

$$\det \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix} = c_x \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_z & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix}$$

$$= c_x (a_y b_z - a_z b_y) - c_y (a_x b_z - a_z b_x) + c_z (a_x b_y - a_y b_z)$$

$\longrightarrow$ Übereinstimmung!

Bsp. Drehmatrizen

Alle Drehmatrizen haben Determinante 1.

$$\det R_x(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\det R_y(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\det R_z(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

Die inverse Matrix

Die zu einer quadratischen Matrix A gehörende inverse Matrix A^{-1} ist durch die Bedingung

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}_n$$

definiert. Erinnerung: Im Falle reeller Zahlen ist jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein inverses Element (bzgl. Multiplikation) $x^{-1} = \frac{1}{x}$ zugeordnet, sodass $x \cdot x^{-1} = 1$.

Beachte: Nicht jede Matrix besitzt ein Inverses (ist invertierbar)! Eine invertierbare Matrix heißt <u>regulär</u>; eine nicht invertierbare Matrix heißt <u>singulär</u>.

<u>Satz</u>: Eine quadratische Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn gilt $\det(A) \neq 0$.

speziell:
- Eine Matrix heißt <u>selbstinvers</u>, wenn gilt $A^{-1} = A$.
- Eine Matrix heißt <u>orthogonal</u>, wenn gilt $A^{-1} = A^T$.

Die inverse Matrix A^{-1} von A kann – sofern existent – mit Hilfe des sogenannten <u>Gauß-Jordan-Algorithmus</u> bestimmt werden. Dabei schreibt man die $(n \times n)$-Matrix A zusammen mit der Einheitsmatrix $\mathbb{1}_n$,

$$(A \mid \mathbb{1}_n),$$

und bringt diesen Ausdruck mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen in die Form $(\mathbb{1}_n \mid A^{-1})$ aus der A^{-1} abgelesen werden kann.

Erlaubte Zeilenumformungen sind:

- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- Hinzuaddieren des k-Fachen einer beliebigen Zeile zu einer anderen,
- Vertauschen zweier Zeilen.

<u>Bsp.</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{der ersten Zeile zur zweiten}]{\text{Addition des (-2)-Fachen}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Zeile mit } 1/3]{\text{Multiplikation der zweiten}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}}}$$

Probe: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$ ✓

<u>Bsp.</u> Eine Drehung um den Winkel α wird durch eine Drehung um den Winkel $-\alpha$ rückgängig gemacht:

$$R_z(\alpha) \cdot R_z(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_3$$

<u>Bem.</u> Für eine invertierbare (2×2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Anwendungen

- **Lösen von linearen Gleichungssystemen**

Erinnerung: lineares Gleichungssystem mit 3 Unbekannten

$$
\begin{aligned}
a_1 x + b_1 y + c_1 z &= k_1 \\
a_2 x + b_2 y + c_2 z &= k_2 \\
a_3 x + b_3 y + c_3 z &= k_3
\end{aligned}
$$

Dieses System kann auch als Matrixgleichung geschrieben werden:

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}.
$$

Das System nach x, y, z aufzulösen, heißt also, es auf eine Form zu bringen, in der die Koeffizientenmatrix diagonal ist.

- **Darstellung von Operationen an Vektoren**

Da die Multiplikation einer $(n \times n)$-Matrix mit einem Spaltenvektor der Länge n wieder einen Spaltenvektor der Länge n ergibt, werden durch Matrizen Vektoren auf Vektoren abgebildet (die Matrix selbst „ist" die Abbildung).

Beispielsweise erhält man durch Anwendung (Multiplikation) der Matrix

$$
R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

auf einen Vektor des $\mathbb{R}^3$ einen um den Winkel ϕ um die z-Achse rotierten Vektor.

einfaches Beispiel: Drehung des Basisvektors $\vec{e}_x$ um einen Winkel von $\phi = \frac{\pi}{2}$ um die z-Achse ergibt $\vec{e}_y$,

$$R_z\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\vec{e}_x = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_y \,.$$

- <u>Darstellung von Koordinatentransformationen</u>

Oft ist es nötig, physikalische Systeme in verschiedenen Koordinatensystemen zu betrachten, also Vektoren durch andere Basisvektoren als $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ auszudrücken. Der Übergang wird durch eine Transformationsmatrix vermittelt,

$$\vec{r}\,' = J \cdot \vec{r} \,.$$

Vektor in „alten" Koordinaten

Vektor in „neuen" Koordinaten

„Jacobi-Matrix"

- <u>Darstellung physikalischer Größen</u>

Viele physikalische Größen sind selbst Matrix-wertig; einige Beispiele:

- Die Trägheitsmomente eines starren Körpers werden in einer Matrix zusammengefasst;
- Bewegungen und Verformungen, die auf der Wechselwir-

kung elektromagnetischer Felder mit Ladungen beruhen, werden durch eine Matrix beschrieben, in der die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes zusammengefasst sind;

- Das doppelbrechende Verhalten anisotroper Kristalle kann durch eine Matrix-wertige Brechzahl beschrieben werden;
- Viele Observablen der Quantenmechanik (Energie, Drehimpulse) können als Matrizen dargestellt werden;
- In der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die Geometrie einer Raumzeit durch eine Matrix bestimmt;
- Die sog. Dichtematrix ist elementarer Gegenstand der statistischen Quantenmechanik.