Grundzüge der Integralrechnung

Wir können die mathematische Operation des Integrierens auffassen als die Umkehrung der Differenziation.
Das heißt: Wir suchen zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ eine sogenannte <u>Stammfunktion</u> $F(x)$, so dass

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} ,$$

und schreiben dafür

$$F(x) = \int f(x)\, dx \qquad \text{(unbestimmtes Integral).}$$

In „symbolischer" Schreibweise:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \qquad \Big|\cdot dx$$

$$f(x)\,dx = dF(x) \qquad \Big|\int$$

$$F(x) = \int dF(x) = \int f(x)\, dx .$$

Einige Integrale können wir schon jetzt notieren:

- $\int 1\, dx = x + C$,
- $\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C$,
- $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$,
- $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(x) + C$,
- $\int e^{cx}\, dx = \frac{e^{cx}}{c} + C$,
- $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x) + C$,

$C = \text{const.}$, $c = \text{const.}$, $n \in \mathbb{N}$. Im Gegensatz zur Differenziation existiert im Allgemeinen kein Algorithmus zur Bestimmung eines Integrals. Außerdem besitzt nicht jede Funktion eine geschlossen analytisch darstellbare Stammfunktion.

Bsp. • Man bestimme die Stammfunktion von

$$f(x) = 3xy^2 + 2y - 4x + 3 .$$

$$F(x) = \int (3xy^2 + 2y - 4x + 3)\, dx$$
$$= \frac{3}{2} x^2 y^2 + 2xy - 2x^2 + 3x + C$$
$$= \left(\frac{3y^2}{2} - 2\right) x^2 + (2y+3)x + C \quad , \quad C = \text{const.}$$

• Man bestimme die Stammfunktion von

$$f(y) = 3xy^2 + 2y - 4x + 3 .$$

$$F(y) = \int (3xy^2 + 2y - 4x + 3)\, dy$$
$$= xy^3 + y^2 - (4x-3)y + C , \qquad C = \text{const.}$$

Ein <u>bestimmtes Integral</u> ist eines, dessen Stammfunktion an einer oberen und einer unteren Grenze ausgewertet wird (dessen Ergebnis also nicht mehr von der Integrationsvariable abhängt),

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = F(x_2) - F(x_1) .$$

Man schreibt auch $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = F(x)\Big|_{x_1}^{x_2} = \Big[F(x)\Big]_{x_1}^{x_2}$.

Als Integrationsgrenze kann auch $\pm\infty$ auftauchen, was im Sinne eines Grenzwertes zu verstehen ist, etwa

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} f(x)\, dx .$$

Man findet außerdem oft Schreibweisen wie

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx.$$

Es ist zu beachten, dass sowohl endliche als auch unendliche Integrale nicht immer konvergent sind, bspw.

$$\int_0^\infty e^x\,dx = e^x\Big|_0^\infty \longrightarrow \infty \quad ,$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{r^2}\,dr = -\frac{1}{r}\Big|_0^\infty \longrightarrow -\infty \quad ,$$

$$\int_0^\infty \cos(x)\,dx = \sin(x)\Big|_0^\infty \longrightarrow ? \;.$$

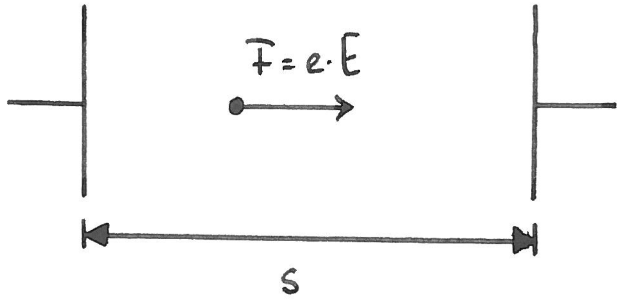
Das Wegintegral

Wir führen das Wegintegral ein am Beispiel der Frage „Was ist Arbeit?".
Bewegt sich ein Teilchen (Massepunkt) unter dem Einfluss einer konstanten Kraft F entlang eines Weges s, dann lautet die Antwort

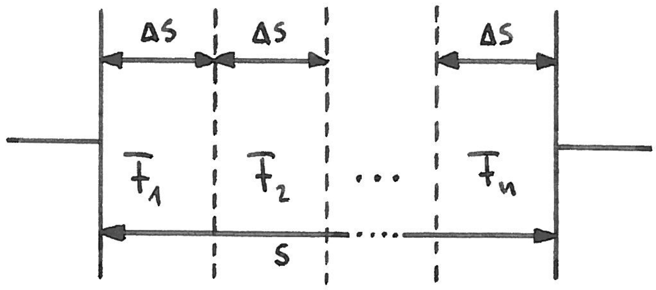
Arbeit = Kraft mal Weg , bzw.

$$W = F \cdot s.$$

Betrachten wir das konkrete Beispiel eines Elektrons (Ladung e) im Kondensator (elektrische Feldstärke E), das sich unter Einfluss der Coulomb-Kraft $F = e \cdot E$ bewegt.



Würden wir das elektrische Feld immer dann umstellen, wenn das Elektron ein bestimmtes Wegintervall Δs zurückgelegt hat, so ergäbe sich die gesamte Arbeit als Summe der Arbeiten innerhalb der einzelnen Teilstrecken.



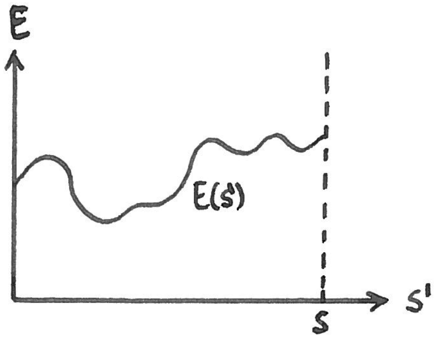
n Teilstücke,
$s = n \cdot \Delta s$

$$
\begin{aligned}
W &= W_1 + W_2 + \ldots + W_n \\
&= eE_1 \Delta s + eE_2 \Delta s + \ldots + eE_n \Delta s \\
&= e \sum_{i=1}^{s/\Delta s} E_i \Delta s
\end{aligned}
$$

Wollen wir nun die Gesamtarbeit bestimmen für den Fall, dass das E-Feld <u>kontinuierlich</u> verändert wird, so haben wir den Weg in unendlich viele Intervalle einzuteilen, sodass das Feld in diesen unendlich kleinen (infinitesimalen) Intervallen konstant ist; das führt auf die Definition des Integrals:

$$
W = e \cdot \lim_{\Delta s \to 0} \left(\sum_{i=1}^{s/\Delta s} E_i \Delta s \right) =: \int_0^s E(s')\, ds' .
$$

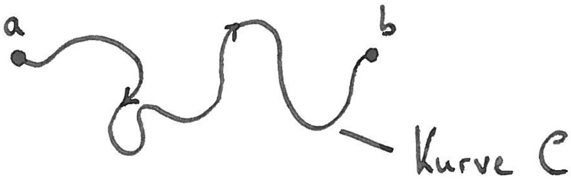
Dabei ist das elektrische Feld nun als eine (kontinuierliche) Funktion $E = E(s)$ aufzufassen.



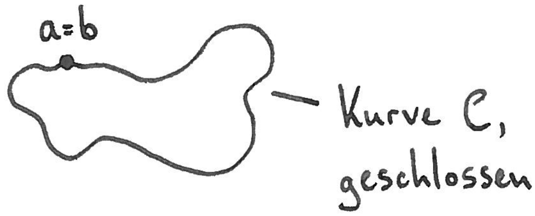
Bildlich gesprochen: Mit Hilfe des Integrals „bewegen" wir uns entlang eines Weges und „sammeln" an allen Punkten die Beiträge der Kraft zur Gesamtarbeit ein.

⟶ Arbeit ist das Integral über eine Kraft entlang eines Weges.

Der Weg muss hierbei nicht notwendigerweise gerade sein.



$$\longrightarrow \quad \int_C F(s)\, ds$$



$$\longrightarrow \quad \oint_C F(s)\, ds$$

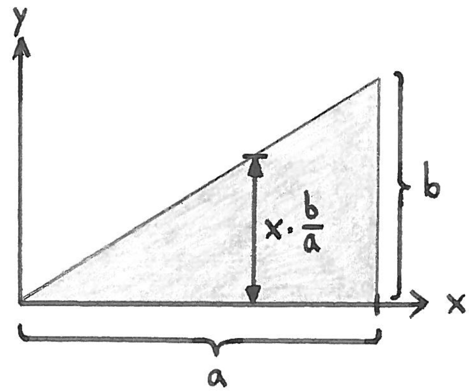
Insbesondere können wir die Länge einer Kurve bestimmen als das Integral über die konstante Funktion $f(s) = 1$.
Bildlich: Wir „sammeln" den Beitrag eines jeden infinitesimalen Streckenabschnitts zur Gesamtlänge ein.

Flächen- und Volumenintegrale

So wie wir Längen mit Hilfe des Wegintegrales berechnen können, lassen sich Flächen mit Hilfe von Flächenintegralen berechnen,

Doppelintegral: $$A = \iint_{\text{(Fläche)}} dx\, dy \,.$$

<u>einfaches Beispiel</u>: das rechtwinklige Dreieck



Integrationsgrenzen:

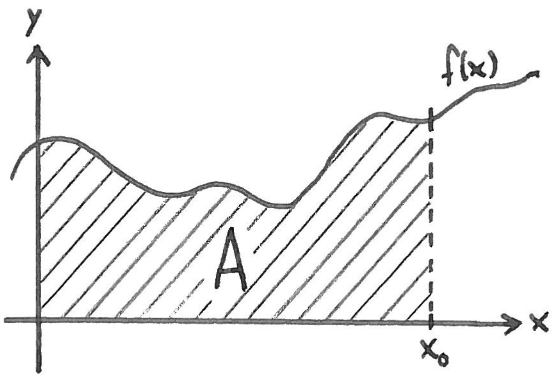
x von 0 bis a,

y von 0 bis $\frac{b}{a}x$

$$\longrightarrow \quad A = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}x} dy = \int_0^a dx \, y\Big|_0^{\frac{b}{a}x} = \int_0^a \frac{b}{a}x \; dx$$

$$= \frac{b}{a}\int_0^a x\, dx = \frac{b}{2a}\, x^2\Big|_0^a = \underline{\underline{\frac{ab}{2}}}$$

In der Schule wird das Integral über eine Funktion f(x) oft eingeführt als die Fläche, die diese Funktion mit der x-Achse einschließt.

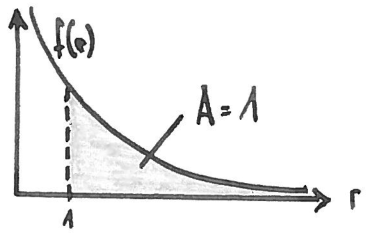


$$A = \int_0^{x_0} dx \int_0^{f(x)} dy = \int_0^{x_0} dx \; y\Big|_0^{f(x)}$$

$$= \int_0^{x_0} f(x)\, dx$$

Beachte: Auch unendliche Flächenintegrale können konvergieren, bspw.

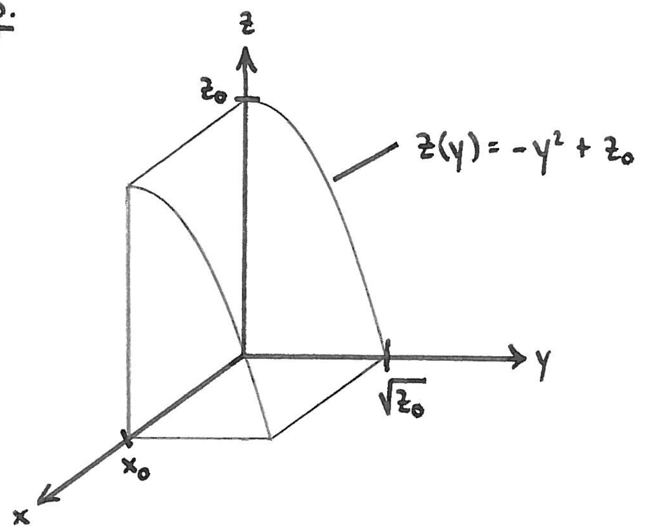
$$A = \int_1^\infty \frac{1}{r^2}\,dr = -\frac{1}{r}\Big|_1^\infty = 1$$



Es wird an dieser Stelle kaum verwunderlich sein, dass auch Volumen durch Integration bestimmt werden.

Dreifachintegral: $V = \iiint\limits_{(\mathrm{Vol.})} dx\,dy\,dz$

<u>Bsp.</u>



$$V = \int_0^{x_0} dx \int_0^{\sqrt{z_0}} dy \int_0^{-y^2+z_0} dz$$

$$= \int_0^{x_0} dx \int_0^{\sqrt{z_0}} dy\,(-y^2 + z_0)$$

$$= \int_0^{x_0} dx \left(-\frac{y^3}{3} + z_0 y\right)_0^{\sqrt{z_0}}$$

$$= x_0\left(-\frac{\sqrt{z_0}^3}{3} + z_0\sqrt{z_0}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{3}x_0\sqrt{z_0}^3}}$$

Hierbei „laufen" die Integrale über x und y die Grundfläche ab, während das z-Integral mit der (von y abhängigen) Höhe multipliziert.

<u>Bem.</u> Man schreibt auch $A = \iint dx\,dy = \int dA$ und $V = \iiint dx\,dy\,dz = \int dV$, sodass eine bildliche Vorstellung ähnlich dem Wegintegral möglich ist: Wir schreiten das

Gebiet innerhalb der Integrationsgrenzen ab und „sammeln" infinitesimale Flächenstücke dA bzw. Volumenstücke dV ein.

Natürlich können auch Flächen- und Volumenintegrale über Funktionen betrachtet werden.

Bsp. Die Masse eines Quaders der Kantenlängen a, b, c, dessen Dichte ϱ ortsabhängig ist, beträgt

$$M = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz \;\; \varrho(x,y,z) = \int_V \varrho(\vec{r})\, dV .$$

Eigenschaften und Rechenregeln

- Linearität:

$$\int_a^b \Big(\alpha f(x) + \beta g(x) \Big)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

- Zerlegung des Integrationsgebietes: $(a < k < b)$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^k f(x)\, dx + \int_k^b f(x)\, dx$$

- Vertauschung der Grenzen:

$$\int_a^b f(x)\, dx = - \int_b^a f(x)\, dx$$

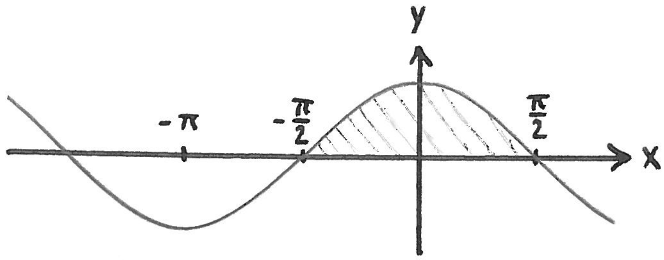
$\longrightarrow$ speziell für <u>gerade Funktionen</u>, $f(-x) = f(x)$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-a}^{0} f(x)\,dx}_{= -\int_0^{-a} f(x)\,dx \,=\, \int_0^a f(-x)\,dx} + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

$$= -\int_0^{-a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx \, , \quad \text{nach Subst.}$$

$x \longmapsto -x$,
$dx \longmapsto -dx$

<u>Bsp.</u> $f(x) = \cos(x)$



$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = \sin(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1 - (-1) = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = \sin(x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

$\longrightarrow$ speziell für ungerade Funktionen, $f(-x) = -f(x)$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-a}^{0} f(x)\,dx}_{= -\int_0^{-a} f(x)\,dx \,=\, \int_0^a f(-x)\,dx} + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

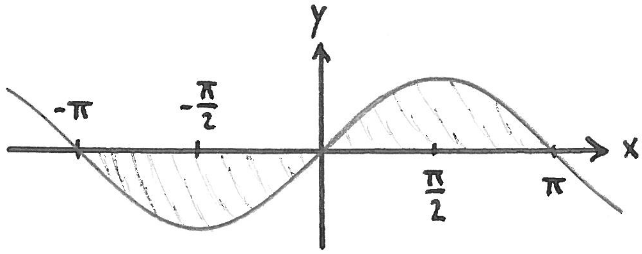
$$= -\int_0^{-a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-x)\,dx \, , \quad \text{nach Subst.}$$

$x \longmapsto -x$
$dx \longmapsto -dx$

Bsp. $f(x) = \sin(x)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\, dx = -\cos(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 1 + (-1) = \underline{\underline{0}}$$



- Umkehrung der Ableitung:

$$\int \frac{df}{dx}\, dx = \int df = f$$

Bsp. Bewegung konstanter Beschleunigung

hier: a — Beschleunigung
$v(t)$ — Geschwindigkeit
$x(t)$ — Ort

$$\frac{dv(t)}{dt} = a \qquad \Big| \int dt'$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dv(t')}{dt'}\, dt' = \int_{t_0}^{t} a\, dt'$$

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = a \cdot (t - t_0)$$

$v(t) - v(t_0) = a \cdot (t - t_0)$, wählen $t_0 = 0$ und nennen $v(0) \equiv v_0$

$$\longrightarrow \quad \underset{\sim\sim\sim\sim\sim}{v(t) = at + v_0}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) \qquad \Big| \int dt'$$

$$\int_0^t \frac{dx(t')}{dt'}\, dt' = \int_0^t (at' + v_0)\, dt'$$

$$\int_{x(0)}^{x(t)} dx = a\frac{t^2}{2} + v_0 t \quad , \quad \text{nennen } x(0) \equiv x_0$$

$$x(t) - x_0 = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t$$

$$\longrightarrow \quad x(t) = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + x_0$$

Im Folgenden werden noch zwei besonders wichtige Methoden zur Umformung von Integralen vorgestellt.

1. Partielle Integration

hier: $u = u(x)$, $v = v(x)$ Funktionen und

$$u' = \frac{du(x)}{dx} \quad , \quad v' = \frac{dv(x)}{dx}$$

Produktregel: $\quad (u\,v)' = u'v + v'u$

bzw. $\quad u\,v' = (uv)' - v\,u' \qquad \Big| \int dx$

$$\boxed{\int u\, v'\,dx = uv - \int v\,u'\,dx}$$

bzw. mit Grenzen: $\int_a^b u\, v'\, dx = u\, v \Big|_a^b - \int_a^b u' v\, dx$

Bsp. $\int x\, e^x\, dx$: $u = x$, $v' = e^x$

$\longrightarrow u' = 1$, $v = e^x$

$$\Rightarrow \int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx = \underline{\underline{(x-1)\, e^x}}$$

Bsp. $\int \ln(x)\, dx = x \ln(x) - \int dx = \underline{\underline{x\big(\ln(x) - 1\big)}}$

$\left.\begin{array}{l} u = \ln(x) \\ v' = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} u' = \frac{1}{x}, \\ v = x \end{array}$

Bsp. $\int \sin(x) \cos(x)\, dx = -\cos^2(x) - \int \sin(x) \cos(x)\, dx$

$\begin{array}{l} u = \cos(x), \\ v' = \sin(x) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} u' = -\sin(x) \\ v = -\cos(x) \end{array}$

$$\Rightarrow 2 \int \sin(x) \cos(x)\, dx = -\cos^2(x)$$

$$\int \sin(x) \cos(x)\, dx = \underline{\underline{-\frac{1}{2} \cos^2(x)}}$$

2. Substitution

Durch Substitution erfolgt ein Wechsel der Integrationsvariable:

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad , \qquad \text{betrachte Funktion} \quad z = z(x) \quad \text{und deren Umkehrung} \quad x(z)$$

$\longrightarrow$ Wechsel der Grenzen: $a \longmapsto z(a)$, $b \longmapsto z(b)$

$\longrightarrow$ Wechsel des Integrationsmaßes:

$$\frac{dx(z)}{dz} = x'(z) \quad \rightsquigarrow \quad dx = x'(z)\,dz$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_{z(a)}^{z(b)} f(x(z))\,x'(z)\,dz$$

alternativ:

$$\frac{dz}{dx} = z'(x) = z'(x(z))$$

Bsp.

$$\int \tan(x)\,dx \quad , \qquad \text{Substitution:} \quad z(x) = \tan(x)$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \tan^2(x) = 1 + z^2$$

$$\longrightarrow \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}$$

$$\Rightarrow \quad \int \tan(x)\,dx = \int \frac{z}{1+z^2}\,dz = \frac{\ln(1+z^2)}{2}$$

$$= \frac{\ln(1+\tan^2 x)}{2} \underset{1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}{=} \frac{\ln(1) - \ln(\cos^2 x)}{2} = \underline{\underline{-\ln(\cos x)}}$$

Bsp.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\cos(x)\,dx \,, \qquad \text{Substitution:} \quad z = \sin(x)$$

$$\frac{dz}{dx} = \cos(x)$$

$\longrightarrow$ Grenzen: $x = 0$: $z = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$: $z = 1$

$\longrightarrow$ Maß: $dx = \frac{dz}{\cos(x)}$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\cos(x)\,dx = \int_0^1 z^3\,dz = \frac{z^4}{4}\Big|_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$