Auffrischungskurs Mathematik

– ein Vorkurs für Studienanfänger –

WS 2022/23

Thema 10: Rechnen mit Vektoren und Matrizen

Aufgabe 1: *Linear (un)abhängige Vektoren*

(a) Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Für welche Werte von t befinden sich die folgenden Vektoren in einer Ebene?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: *Skalarprodukt und Vektorprodukt*

(a) Berechnen Sie die folgenden Skalarprodukte.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5a+6 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die folgenden Vektorprodukte.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(c) Nutzen Sie die Regeln des Skalarproduktes, um den Kosinussatz im allgemeinen Dreieck herzuleiten.

(d) Nutzen Sie die Regeln des Vektorproduktes, um den Sinussatz im allgemeinen Dreieck herzuleiten.

Aufgabe 3: *Matrizen*

(a) Bilden Sie – falls möglich – die Inversen der folgenden Matrizen mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

(b) Matrixmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ. Berechnen Sie $A \cdot B - B \cdot A$.

(c) Welche Bedingungen müssen die Einträge m_i einer Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$$

erfüllen, damit $|M \cdot \vec{v}| = |\vec{v}|$ für einen beliebigen zweikomponentigen Vektor $\vec{v}$ gilt?

Aufgabe 4: *Laplace'scher Entwicklungssatz*

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix. Für welche Werte von a ist die Matrix nicht invertierbar?

$$A = \begin{pmatrix} a & 3 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & -1 \\ -a & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: *Vektorprodukt*

Das Vektorprodukt $\vec{\omega} \times \vec{u}$ zweier Vektoren

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

lässt sich auch als Matrixmultiplikation $\Omega \cdot \vec{u}$ mit einer (3×3)-Matrix Ω mit den Einträgen $\pm\omega_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$ schreiben. Wie sieht Ω aus? Welche Eigenschaften hat es (Determinante, Spur, Symmetrie)?

Aufgabe 6*: *Höhere Dimensionen*

Im dreidimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ kann jede beliebige Drehung in Drehungen um die x-, die y- und die z-Achse zerlegt werden, d.h. man benötigt genau drei linear unabhängige Drehmatrizen für eine solche Zerlegung. Wie viele linear unabhängige Drehmatrizen benötigt man im d-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^d$?

Aufgabe 7*: *Diskreter Laplace-Operator*

Gegeben sei die $(n \times n)$-Matrix Δ_n, welche die Einträge -2 auf der Haupt- und 1 auf den beiden Nebendiagonalen hat,

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Determinante von Δ_n, indem Sie wie folgt vorgehen:

1. Finden Sie eine Rekursionsrelation, die $\det(\Delta_n)$ auf $\det(\Delta_{n-1})$ und $\det(\Delta_{n-2})$ zurückführt.
2. Raten Sie einen allgemeinen Ausdruck für $\det(\Delta_n)$ und beweisen Sie ihn mittels vollständiger Induktion. Alternativ kann der Versuch unternommen werden, das Verfahren aus Thema 9, Aufgabe 5 anzuwenden.