

# AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2022/23

## Thema 4: Umgang mit Polynomen höheren Grades

### Aufgabe 1: Nullstellensuche

- (a) Stellen Sie das Polynom dritten Grades auf, das Wurzeln  $a$ ,  $b$  und  $c$  hat.
- (b) Zerlegen Sie das Polynom  $f_4(x) = x^3 + 2x^4 + 4x^2 + 2 + x$  in Faktoren. Welche Aussage können Sie über dessen Nullstellen treffen?
- (c) Bestimmen Sie alle Nullstellen des Polynoms  $f_5(x) = x^5 - 3x^3 + 2x$ .
- (d) Bestimmen Sie die kleinste positive Nullstelle des Polynoms  $f_4(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24$ . Setzen Sie näherungsweise  $\sqrt{3} \approx 3 - \pi^2/8$ .

### Aufgabe 2: Polynomdivision

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke. Für welche Werte von  $n$  bleibt die Polynomdivision in (d) ohne Rest?

- (a)  $(21a^3 - 34a^2b + 25b^3) : (7a + 5b)$
- (b)  $(9x^3 + 2y^3 - 7xy^2) : (3x - 2y)$
- (c)  $(25x^4 + a^2x^2 + 25a^4) : (5x^2 + 7ax + 5a^2)$
- (d)  $(x^2 + 2x - 15) : (x + n)$

### Aufgabe 3: Kubische Gleichungen

- (a) Bestimmen Sie den Wert von  $m$  in der Gleichung

$$6x^3 - 7x^2 - 16x + m = 0,$$

wenn eine Wurzel der Gleichung den Wert 2 hat. Berechnen Sie auch die beiden anderen Wurzeln.

- (b) Die Zahlen 2 und 3 seien Wurzeln der Gleichung

$$2x^3 + mx^2 - 13x + n = 0.$$

Bestimmen Sie die Zahlenwerte von  $m$  und  $n$ , und geben Sie die dritte Wurzel an.

### Aufgabe 4: Nullstellenraten

Finden Sie jeweils mindestens eine Nullstelle der folgenden Ausdrücke und spalten Sie diese als Linearfaktor  $(x - x_0)$  vom Polynom ab.

- (a)  $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$
- (b)  $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 9x + 9$
- (c)  $x^4 - 3x^2 + 3x + 2$
- (d)  $x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 1$

**Aufgabe 5:** *Partialbruchzerlegung*

Schreiben Sie, so weit möglich, als Summe von Partialbrüchen.

(a)  $\frac{x-5}{x^2-2x-3}$

(c)  $\frac{2x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4}$

(b)  $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

(d)  $\frac{2x^4-4x^3-5x^2+(\sqrt{2}-7)x+\sqrt{2}+12}{x^2-2x-3}$

**Aufgabe 6:** *Polynome in Ungleichungen*

Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen.

(a)  $(1+a+a^2)^2 < 3(1+a^2+a^4)$ , für  $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(b)  $x^4 - x^2 - 6x + 10 > 0$ , für  $x \in \mathbb{R}$