

AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2022/23

Thema 5: Exponentialfunktionen
Logarithmen
Natürliche Exponentialfunktion

Aufgabe 1: Logarithmische und Exponentialgleichungen

Lösen Sie jeweils für x bzw. y . Beachten Sie mögliche Fallunterscheidungen bezüglich der auftretenden Konstanten.

- (a) $a 2^x = e^{bx}$
- (b) $x = 49^{1-\log_7(2\sqrt{x})} + 5^{-\log_5(4x)}$
- (c) $e^{3ax} - 2^{a+1} e^{2ax} + 4^a e^{ax} = \log_b(1)$
- (d) $x^2 - \sqrt[3]{a^3} \cdot 2x - \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{a^{-1}} = 1$
- (e) $\log_a x + \log_a y = 2, \quad \log_b x - \log_b y = 4$
- (f) $3 \log_{xa^2} x + \frac{1}{2} \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x = 2$

Aufgabe 2: Verdopplungszeit

Der Wissenszuwachs eines Physik-Studenten mit Anfangswissen A sei beschrieben durch

$$W(t) = A e^{ct}, \quad c > 0,$$

sodass $W(t)$ die „Menge“ an Wissen zur Zeit t gibt.

- (a) Nach welcher Zeit τ_2 hat das Wissen eines Studenten auf das Doppelte zugenommen?
- (b) Nach welcher Zeit τ_n hat das Wissen eines Studenten auf das n -Fache zugenommen?
- (c) Drücken Sie τ_n als Vielfaches von τ_2 aus. Welcher Zusammenhang besteht in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$? Welche Aussage können Sie für $n = 2^m, m \in \mathbb{N}$, treffen?

Aufgabe 3: *Hyperbelfunktionen*

Es seien die Funktionen

$$\begin{aligned}f(x) &:= e^x + e^{-x}, \\g(x) &:= e^x - e^{-x}\end{aligned}$$

definiert.

- (a) Finden Sie jeweils einen Ausdruck für $f(2x)$ und $g(2x)$ in Abhängigkeit der Funktionen einfacher Argumente, $f(x)$ und $g(x)$.
- (b) Finden Sie jeweils einen Ausdruck für $f(x+y)$ und $g(x+y)$ in Abhängigkeit von $f(x)$ und $f(y)$ sowie $g(x)$ und $g(y)$. Vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus (a), indem Sie $x = y$ setzen.
- (c) Schreiben Sie die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ in Reihendarstellung.
- (d) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion g^{-1} von $g(x)$.