

AUFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2022/23

Thema 7: Grundlagen der Differentialrechnung Kurvendiskussion

Aufgabe 1: Ableitungen I

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

$$(a) \quad Q(r) = \frac{3r^2}{2} \left(\frac{1}{2} + \ln \frac{r}{r_0} \right)$$

$$(b) \quad f(x) = \cos^4(3tx) - \sin^4(3tx)$$

$$(c) \quad S(\tau) = (\tau - 1) e^\tau + \frac{\tau^2}{4} (2 \ln \tau - 1)$$

$$(d) \quad y(x) = \frac{\exp(2x)}{25} [(5x - 4) \sin x + (10x - 3) \cos x]$$

$$(e) \quad F(x) = -\frac{k}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}$$

$$(f) \quad N(z) = \frac{2 \cos\left(\frac{z}{2}\right)}{\sqrt{1 + \cos(z)}} \left[\ln \left(\cos \frac{z}{4} + \sin \frac{z}{4} \right) - \ln \left(\cos \frac{z}{4} - \sin \frac{z}{4} \right) \right]$$

Aufgabe 2: Ableitungen II

Finden Sie die n -te Ableitung der folgenden Funktionen.

$$(a) \quad f(x) = x^n$$

$$(d) \quad f(x) = a^x$$

$$(b) \quad f(x) = e^{kx} + e^{-kx}$$

$$(e) \quad f(x) = \frac{1}{1 - x}$$

$$(c) \quad f(x) = x^{n-1}$$

$$(f)^* \quad f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Aufgabe 3: Kurvendiskussion I

Ein zweiatomiges Molekül lässt sich näherungsweise durch das sogenannte „Morse-Potential“ beschreiben,

$$U(x) = D (e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}), \quad D, \alpha = \text{const.}$$

- Bestimmen Sie Nullstellen und lokale Extrema der Funktion $U(x)$ sowie deren Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$.
- Skizzieren Sie die Funktion $U(x)$ für $D = \alpha = 1$ im Intervall $x \in [-1, 5]$.

Aufgabe 4: *Kurvendiskussion II*

Die Bewegung eines Teilchens mit Drehimpuls L und Energie E in der gekrümmten Raumzeit eines Schwarzen Loches der Masse m wird beschrieben durch das Potential

$$U(r) = \frac{E}{2} - \frac{Em}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{mL^2}{r^3}, \quad r > 0.$$

- Bestimmen Sie Nullstellen und lokale Extrema der Funktion $U(r)$ sowie deren Verhalten für $r \rightarrow \infty$ und $r \rightarrow 0$.
- Setzen Sie $m = 1/2$. Welche Bedingungen an E und L müssen erfüllt sein, damit $U(r)$ zwei, eine oder keine lokalen Extrema besitzt?
- Skizzieren Sie die Funktion $U(r)$ für $E = 1$ und $L = 2$ (nicht maßstabsgerecht).

Aufgabe 5*: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*

(a) Finden Sie eine Funktion $f(x)$, welche die folgende Gleichung erfüllt:

$$f''(x) = a^2 f(x) + bx.$$

(b) Finden Sie eine Funktion $f(x)$, welche die folgende Gleichung erfüllt:

$$f'(x) = (1 + \ln(x)) f(x).$$