

AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– EIN VORKURS FÜR STUDIENANFÄNGER –

WS 2022/23

Thema 8: Die Methode der vollständigen Induktion

Aufgabe 1: *Rekursive und explizite Zuordnungsvorschrift*

Eine Reihe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} = 2a_n + 1, \quad a_0 = 0.$$

Finden Sie einen expliziten Ausdruck für a_n und beweisen Sie ihn mittels vollständiger Induktion.

Aufgabe 2: *Vollständige Induktion I*

Beweisen Sie

$$S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aufgabe 3: *Vollständige Induktion II*

Beweisen Sie, dass die Summe der Kuben der ersten n natürlichen Zahlen gleich $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ist.

Aufgabe 4: *Vollständige Induktion III*

Zeigen Sie, dass die Summe der Kuben dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen durch 9 teilbar ist.

Aufgabe 5: *Die Suche nach der richtigen Summenformel*

Stellen Sie eine Summenformel für das Polynom

$$S_n = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$$

auf und beweisen Sie deren Richtigkeit durch vollständige Induktion.

Aufgabe 6*: *Fibonacci-Zahlen I*

Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist definiert durch $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für $n \geq 1$ und die Startwerte $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$. Beweisen Sie, dass ein expliziter Ausdruck für die n -te Fibonacci-Zahl gegeben ist durch

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (x_+^n - x_-^n), \quad \text{mit } x_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$