Auffrischungskurs Mathematik

– ein Vorkurs für Studienanfänger –

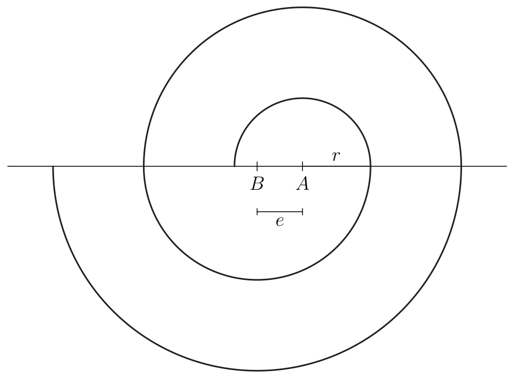
WS 2022/23

Thema 9: Arithmetische & geometrische Reihen
Der binomische Satz

Aufgabe 1: *Arithmetische Reihe*

Eine Spirale bestehe aus zwei Scharen konzentrischer Halbkreise um die Punkte A und B. Es sei r der Radius des innersten Halbkreises und die Strecke $\overline{AB} = e$.

1. Wie lang ist der n-te Halbbogen?
2. Wie lang ist der Gesamtbogen der Spirale bis dahin?



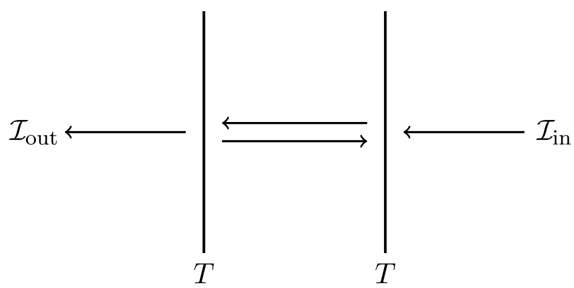
Aufgabe 2: *Geometrische Folge*

Beim Durchgang durch eine Glasplatte verliert ein Lichtstrahl $^1/_{12}$ seiner Lichtstärke. Wie viele Platten muss er durchdringen, wenn er nur noch die Hälfte der ursprünglichen Lichtstärke besitzen soll?

Hinweis: Es genügt die Angabe des Ergebnisses in impliziter Form.

Aufgabe 3: *Geometrische Reihe*

Es sei eine Anordnung aus zwei Glasplatten gegeben, in die ein Laserstrahl der Intensität $\mathcal{I}_{\text{in}}$ eingeschossen werde. Jede Platte besitze einen Transmissionskoeffizienten T $(0 < T < 1)$, d.h. dass an jeder Platte von einem Lichtstrahl der Intensität $\mathcal{I}$ ein Anteil $T\mathcal{I}$ transmittiert und ein Anteil $(1-T)\mathcal{I}$ reflektiert wird. Bestimmen Sie die Intensität $\mathcal{I}_{\text{out}}$, mit der das Licht auf der anderen Seite der Anordnung austritt.



Aufgabe 4: *Der binomische Satz*

(a) Berechnen Sie $(1+a)^6 + (1-a)^6$.

(b) Schreiben Sie die allgemeine Binomialformel für $(1+x)^n$ und $(1-x)^n$ auf und setzen Sie anschließend $x = 1$. In letzterem Falle sei $n \geq 1$.

(c) Es seien die Funktionen $f(x) = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2$ und $g(x) = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$ definiert. Finden Sie einen Ausdruck, der $f(nx) + g(nx)$, mit $n \in \mathbb{N}$, auf (Potenzen von) $f(x)$ und $g(x)$ zurückführt.

Aufgabe 5: *Erzeugende Funktion*

Betrachten Sie die Rekursionsgleichung $a_{n+1} = 2a_n + 1$ mit Anfangswert $a_0 = 0$ aus Aufgabe 1, Thema 8. Es sei eine (unbekannte) Funktion definiert als

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,.$$

1. Multiplizieren Sie beide Seiten der Rekursionsgleichung mit x^n, summieren Sie über n (von Null bis Unendlich) ab und versuchen Sie alle auftretenden Terme durch $f(x)$ auszudrücken. Lösen Sie für $f(x)$.

2. Nutzen Sie Ihr Wissen über geometrische Reihen, um $f(x)$ wieder in Reihendarstellung zu überführen und lesen Sie die Koeffizienten vor x^n ab.

Aufgabe 6*: *Zustandssumme*

Vereinfachen Sie den Ausdruck

$$\Omega_N = \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{N} \sum_{n_3=0}^{N} \cdots \sum_{n_k=0}^{N} f(n_1) f(n_2) f(n_3) \ldots f(n_k) \,, \qquad \text{wobei} \quad f(n) = \mathrm{e}^{-n} \,.$$

Bestimmen Sie anschließend den Grenzwert $\Omega = \lim_{N \to \infty} (\Omega_N)$.

Aufgabe 7*: *Fibonacci-Zahlen II*

Wenden Sie das Verfahren aus Aufgabe 5 auf die Folge $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ der Fibonacci-Zahlen mit Startwerten $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ an. Beachten Sie, dass hier $n \geq 1$ gelten muss.