

AUFFRISCHUNGSKURS MATHEMATIK

– LÖSUNGEN ZUR SELBSTKONTROLLE –

WS 2022/23

Thema 4

Aufgabe 1: Nullstellensuche

(a) $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc$

(b) $x^3 + 2x^4 + 4x^2 + 2 + x = (x^2 + 1)(2x^2 + x + 2)$, keine (reellen) Nullstellen

(c) $x_1 = 0$, $x_{2/3} = \pm\sqrt{2}$, $x_{4/5} = \pm 1$

(d) $x_0 \approx \frac{\pi}{2}$

Aufgabe 2: Polynomdivision

(a) $(21a^3 - 34a^2b + 25b^3) : (7a + 5b) = 3a^2 - 7ab + 5b^2$

(b) $(9x^3 - 7xy^2 + 2y^3) : (3x - 2y) = 3x^2 + 2xy - y^2$

(c) $(25x^4 + a^2x^2 + 25a^4) : (5x^2 + 7ax + 5a^2) = 5x^2 - 7ax + 5a^2$

(d) $n = 5$ oder $n = -3$, da $(x^2 + 2x - 15) = (x + 5)(x - 3)$

Aufgabe 3: Kubische Gleichungen

(a) $m = 12$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = -\frac{3}{2}$

(b) $m = -5$, $n = 30$, $x_3 = -\frac{5}{2}$

Aufgabe 4: Nullstellenraten

(a) $x_0 = 1$ oder $x_0 = 2 \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 1)(x^2 - 4x + 4) = (x - 1)(x - 2)^2$

(b) $x_0 = -3 \Rightarrow x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 9x + 9 = (x + 3)(x^3 - 5x^2 + 2x + 3)$

(c) $x_0 = -2 \Rightarrow x^4 - 3x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x^3 - 2x^2 + x + 1)$

(d) $x_0 = 1 \Rightarrow x^5 - x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^4 - 3x^2 + 1)$

Aufgabe 5: *Partialbruchzerlegung*

(a) $\frac{x-5}{x^2-2x-3} = \frac{3}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-3)}$

(b) $\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

(c) $\frac{2x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{2}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}$

(d) $\frac{2x^4-4x^3-5x^2+(\sqrt{2}-7)x+\sqrt{2}+12}{x^2-2x-3} = 2x^2 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{x-3} - \frac{5}{x+1}$

Aufgabe 6: *Polynome in Ungleichungen*

(a) $(1 + a + a^2)^2 < 3(1 + a^2 + a^4) \Leftrightarrow 0 < a^4 - a^3 - a + 1 = (a^3 - 1)(a - 1)$ □

(b) $x^4 - x^2 - 6x + 10 = (x^2 - 1)^2 + (x - 3)^2 > 0$ □