Auffrischungskurs Mathematik

– Lösungen zur Selbstkontrolle –

WS 2022/23

Thema 7

Aufgabe 1: *Ableitungen I*

(a) $Q'(r) = 3r\left(1 + \ln\frac{r}{r_0}\right)$

(b) $f'(x) = -12t\sin(3tx)\cos(3tx)$

(c) $S'(\tau) = \tau\left(\mathrm{e}^{\tau} + \ln\tau\right)$

(d) $y'(x) = x\cos(x)\,\mathrm{e}^{2x}$

(e) $F'(x) = \frac{k(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}^{\,3}}$

(f) $N'(z) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos(z)}}$

Aufgabe 2: *Ableitungen II*

(a) $f^{(n)}(x) = n!$

(b) $f^{(n)}(x) = k^n\left(\mathrm{e}^{kx} + (-1)^n\,\mathrm{e}^{-kx}\right)$

(c) $f^{(n)}(x) = 0$

(d) $f^{(n)}(x) = (\ln a)^n\,a^x$

(e) $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

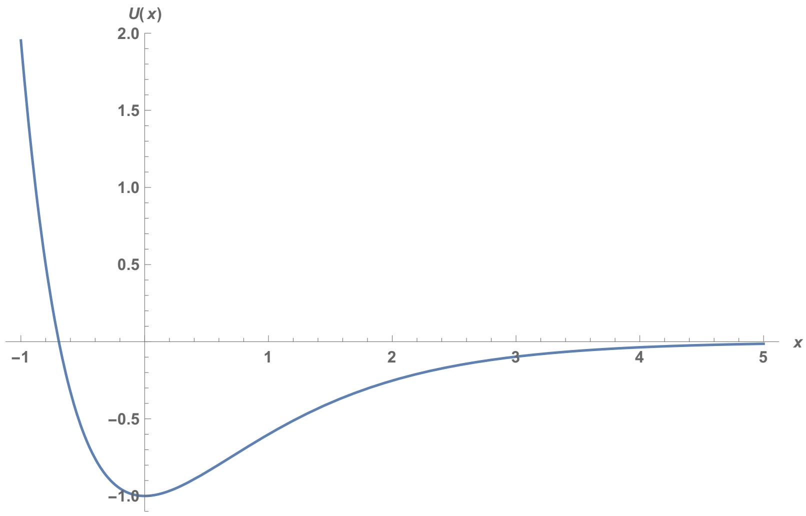
(f) * $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}n!}{\sqrt{5}}\left(\frac{x_1^n}{(1+x_1x)^{n+1}} - \frac{x_2^n}{(1+x_2x)^{n+1}}\right)$, wobei $x_{1/2}$ die Nullstellen des Nenners bezeichnen.

Aufgabe 3: *Kurvendiskussion I*

- Nullstelle: $x_0 = -\frac{\ln 2}{\alpha}$

  Extremum: $x = 0$, $U(x = 0) = -D$

  Asymptotik: $\lim\limits_{x\to-\infty} U(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} U(x) = 0$

- 

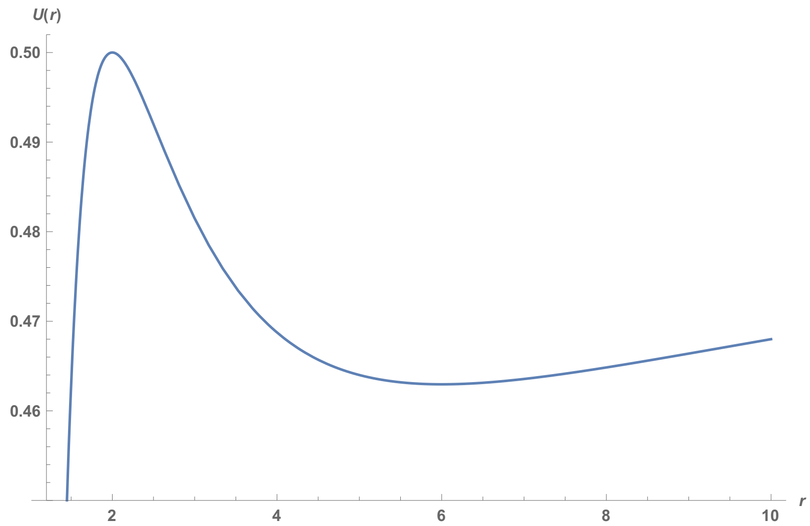
Aufgabe 4: *Kurvendiskussion II*

- Nullstelle: $r_0 = 2m$

  Extrema: $r_{1/2} = \frac{L^2}{2Em}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12Em^2}{L^2}}\right)$

  Asymptotik: $\lim\limits_{r\to\infty} U(r) = \frac{E}{2}$, $\lim\limits_{r\to 0} U(r) = -\infty$

- 2 Extrema für $3E < L^2$, 1 Extremum für $3E = L^2$, kein (reelles) Extremum für $3E > L^2$

- 

Aufgabe 5*: *Gewöhnliche Differentialgleichung*

(a) allgemeinste Lösung: $f(x) = c_1\,\mathrm{e}^{ax} + c_2\,\mathrm{e}^{-ax} - \frac{b}{a^2}x$ mit Konstanten $c_{1/2}$

(b) allgemeinste Lösung: $f(x) = c\,x^x$ mit Konstante c