# Auffrischungskurs Mathematik

## – Lösungen zur Selbstkontrolle –

WS 2022/23

**Thema 8**

**Aufgabe 1:** *Rekursive und explizite Zuordnungsvorschrift*

Vermutung: $a_n = 2^n - 1 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

$$a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2\left(2^k - 1\right) = 2^{k+1} - 1$$

$\square$

**Aufgabe 2:** *Vollständige Induktion I*

Vermutung: $S_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad S_{n+1} = (-1)^n \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

$S_1 = 1 \ \checkmark$

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + (-1)^k(k+1)^2 = (-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k(k+1)^2 = (-1)^k(k+1)\left[\frac{(-1)^{-1}k}{2} + (k+1)\right] \\ &= \frac{(-1)^k(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

$\square$

**Aufgabe 3:** *Vollständige Induktion II*

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

Vermutung: $S_n = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 \quad \Rightarrow \quad S_{n+1} = \left[\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$

$S_1 = 1 \ \checkmark$

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^3 = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2\left[k^2 + 4(k+1)\right] = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

$\square$

**Aufgabe 4:** *Vollständige Induktion III*

$$S_n = (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$$

Vermutung: $S_n = 9m$ mit $m \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad S_{n+1} = 9m'$ mit $m' \in \mathbb{N}$

$$S_2 = 36 = 9m \text{ mit } m = 4 \ \checkmark$$

$$S_{k+1} = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 = \underbrace{(k-1)^3 + k^3 + (k+1)^3}_{S_n} + (k+2)^3 - (k-1)^3$$

$$= 9m + (k+2)^3 - (k-1)^3 = 9m + 9(k^2+k+1) = 9m' \text{ mit } m' = m + k^2 + k + 1 \in \mathbb{N}$$

$\square$

**Aufgabe 5:** *Die Suche nach der richtigen Summenformel*

Vermutung: $S_n = \dfrac{(1-x)(2-x)\dots(n-x)}{n!} \quad \Rightarrow \quad S_{n+1} = \dfrac{(1-x)(2-x)\dots(n-x)(n+1-x)}{(n+1)!}$

$$S_1 = 1 - x \ \checkmark$$

$$S_{k+1} = S_k + (-1)^{k+1}\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)(x-k)}{(k+1)!}$$

$$= \frac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)}{k!} + (-1)^{k+1}\frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)(x-k)}{(k+1)!}$$

$$= \frac{1}{(k+1)!}\left[(1-x)(2-x)\dots(k-x)(k+1) + (-1)^{k+1}(-1)^k x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)(x-k)\right]$$

$$= \frac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)(k-x+1)}{(k+1)!}\underbrace{\left[\frac{k+1}{k-x+1} + (-1)^{2k+1}\frac{x}{k-x+1}\right]}_{1}$$

$$= \frac{(1-x)(2-x)\dots(k-x)(k-x+1)}{(k+1)!}$$

$\square$

**Aufgabe 6*:** *Fibonacci-Zahlen I*

Vermutung: $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(x_+^n - x_-^n\right) \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(x_+^{n+1} - x_-^{n+1}\right)$

$$a_0 = 0\,, \quad a_1 = 1 \quad \checkmark$$

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_+^n - x_-^n + x_+^{n-1} - x_-^{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)}_{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)}_{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_+^{n+1} - x_-^{n+1}\right)$$

$\square$