Die Faltung

- ordnet 2 Funktionen (oder Distributionen) eine dritte zu
- Definition:

$$(f*g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \qquad \text{mit } f,g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$$

- Kommutativität:

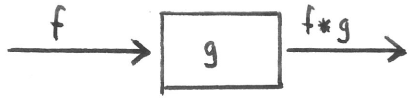
$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = -\int_{\infty}^{-\infty} d\tau'\, f(t-\tau')\, g(\tau') = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau')\, f(t-\tau')\, d\tau' = (g*f)(t)$$

Substitution:
$\tau' = t-\tau$, $d\tau = -d\tau'$,
$\tau = -\infty \to \tau' = \infty$
$\tau = \infty \to \tau' = -\infty$

- definiert für alle f, g, für die das Integral existiert, z.B. $L^1(\mathbb{R}^n)$-Funktionen
- δ-Distribution stellt das neutrale Element der Faltung dar:

$$(f*\delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau = f(t)$$

Interpretation: Die Faltung gibt das ausgegebene Signal $f*g$ nach Wechselwirkung eines Eingangssignals f mit einem System, das durch eine Responsefunktion g charakterisiert ist.



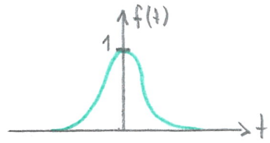
<u>Bsp.:</u> Akkustik – Widerhall in einem Raum

→ Durch Aussenden eines δ-Impulses (Knall) $f(t) = \delta(t)$ erhält man die Impulsantwort (Echo) $g(t)$ des Raumes:

$$\delta * g = g$$

→ Durch Messung von $g(t)$ ist das „Widerhall-Verhalten" des Raumes bekannt und man kann das Echo $f*g$ eines jeden beliebigen Signals f ausrechnen.

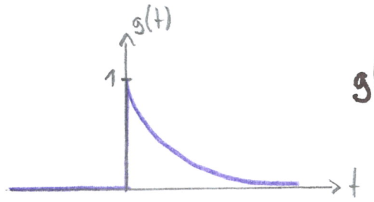
graphisch: Gauß-förmiges Signal



$f(t) = e^{-t^2/\sigma}$

+

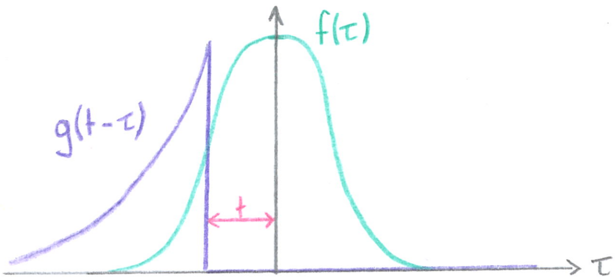
exponentielles Abklingen



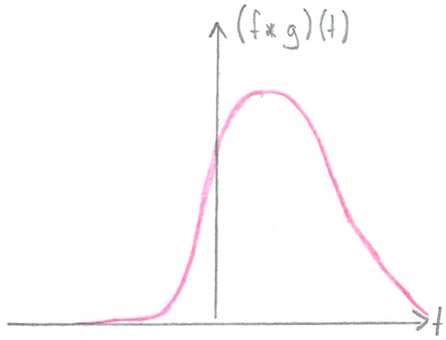
$g(t) = e^{-t}$

$\Downarrow$

Resultat



(t fest, Integration über τ)



<u>Bsp.:</u> Bildverarbeitung – Weichzeichnen

→ Jedem Pixel (zwei Koordinaten) sind Bildinformationen zugeordnet, $f(x,y)$.

→ Faltung (z.B. mit 2D-Gauß, $g(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$) ordnet jedem Pixel auch die Bildinformationen benachbarter Pixel zu.

<u>Bem.:</u> Die Entfaltung als Umkehrung der Faltung ist nicht eindeutig, selbst wenn f oder g bekannt sind, da:

$$f = g * h \xrightarrow[\text{Fourier-trafo}]{} \tilde{f} = \tilde{g} \cdot \tilde{h} \rightarrow \tilde{g} = \tilde{f}/\tilde{h} \xrightarrow[\text{Fourier-trafo}]{} g = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}/\tilde{h}],$$

$\tilde{h}$ kann Nullstellen haben!

D.h., dass das Filtern verrauschter Signale bzw. das Schärfen verschmierter Bilder selbst bei bekannter Rausch-Quelle nicht ohne Weiteres möglich ist.

<u>Elektrodynamik:</u>

$$\vec{P}(\vec{r},t) = \varepsilon_0\, R(\vec{r},t) * \vec{E}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} R(\vec{r},\tau)\, \vec{E}(\vec{r},t-\tau)\, d\tau$$

elektr. Signal

Antwort d. Mediums (abhg. vom Materiemodell)

mit $\chi(\vec{r},\omega) := \mathcal{F}[R(\vec{r},t)]$

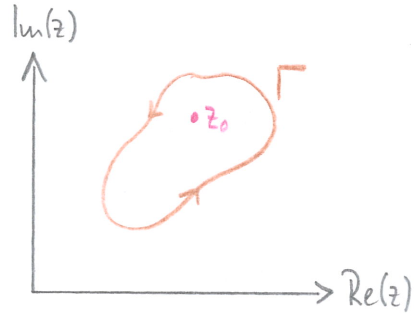
und $R|_{t<0} \overset{!}{=} 0$ wg. Kausalität

Zum Residuensatz

(siehe: I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew: „Taschenbuch der Mathematik", 5. Aufl., 2001)

Berechnung komplexer Integrale über einen geschlossenen Weg anhand der eingeschlossenen Singularitäten (ähnlich dem Gauß'schen Satz im Reellen).

Gegeben: Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die fast überall[1] eindeutig und analytisch[2] ist, und eine geschlossene Kurve Γ in der komplexen Zahlenebene



Gesucht: $\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$

Es sei z_0 eine isolierte singuläre Stelle[3] von $f(z)$, d.h. in der Umgebung von z_0 sei f analytisch; dann existiert die sog. Laurent-Reihe:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n .$$

Unterscheiden jetzt 3 Fälle:

1. keine Glieder mit $n<0$: Übergang in eine Taylor-Reihe, z_0 ist dann eine sog. „hebbare" Singularität

   Bem: „Hebbar" heißt, dass f analytisch[4] auf z_0 fortgesetzt werden kann, z.B.: $f: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) := \frac{\sin z}{z}$ auf ganz $\mathbb{C}$ analytisch fortsetzbar durch $f(0) := 1$.

1: an höchstens abzählbar endlich vielen Punkten nicht; auf jedem Fall aber in ihrem Definitionsbereich $D(f) \subseteq \mathbb{C}$, aus dem diese Pkt. ausgenommen sind

2: lokal in eine Potenzreihe entwickelbar

3: d.h. $z_0 \notin D(f)$

4: Hier fallen „analytisch", „holomorph" und „stetig differenzierbar" zusammen.

2. endlich viele Glieder mit $n<0$ (wobei $a_n = 0$, $a_m \neq 0$ für ein m mit $n<m<0$): z_0 heißt „außerwesentliche Singularität" oder „Pol m-ter Ordnung"; durch Multiplikation von f mit $(z-z_0)^m$ wird z_0 hebbar, da dann $(z-z_0)^m f$ analytisch auf z_0 fortsetzbar ist.

   Bsp.: $f: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) := z + \frac{1}{z}$ hat Singularität bei $z_0 = 0$ $\rightarrow$ Multiplikation mit $(z-z_0)^1 = z$ liefert $z f(z) = z^2 + 1$, was auf ganz $\mathbb{C}$ analyt. fortsetzbar ist $\rightarrow$ z_0 ist Polstelle 1. Ordnung von f

3. unendlich viele Glieder mit $n<0$: z_0 heißt „wesentliche Singularität".

   Bsp.: $f(z) = e^{1/z}$

Im Weiteren ist nur noch der 2. Punkt von Bedeutung. Der zu einem Pol m-ter Ordnung gehörende Koeffizient a_m in der Laurent-Reihe heißt „Residuum von f im Punkt z_0".

Es gilt (ohne Herleitung): $\mathrm{Res}_{z_0}[f(z)] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right]$.

Bem: Wir halten uns nicht damit auf, Differenzierbarkeit (und Integrierbarkeit) im Komplexen einzuführen. Die Konzepte lassen sich bspw. aus dem $\mathbb{R}^2$ übertragen.

Spezialfall: f als Quotient schreibbar, $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ (mit g analytisch)

Dann sind die Nullstellen von $h(z)$ gerade die Pole von $f(z)$ und die Vielfachheit einer Nullstelle entspricht der Ordnung des Poles, d.h.:

$h(z_0) = 0,\ h'(z_0) = 0,\ \dots,\ h^{(m-1)}(z_0) = 0,\ h^{(m)}(z_0) \neq 0 \Rightarrow z_0$ Pol m-ter Ordnung.

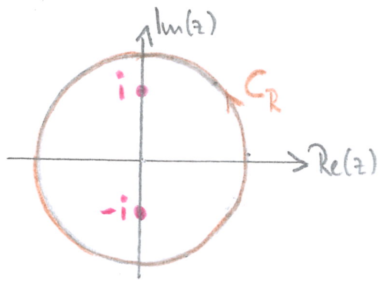
Jetzt endlich zurück zum Integral $\oint_\Gamma f(z)\,dz$!

Es habe $f(z)$ genau n Polstellen $z_0^{(k)}$, $k=1,\dots,n$, die innerhalb der Kurve Γ liegen.

Residuensatz:
$$\underline{\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_0^{(k)}}[f(z)]}$$

Beispiele:

(i) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+1}$; suchen $\oint_{C_R} f(z)\,dz$, wobei C_R: Kreis in $\mathbb{C}$ mit Radius R und $R>1$



$\rightarrow$ Pole bei: $z_0^{(1)} = i$, $z_0^{(2)} = -i$

$\rightarrow$ jeweils Pole 1. Ordnung

$$\mathrm{Res}_{z_0^{(1)}}[f(z)] = \lim_{z\to i}\left[(z-i)\,f(z)\right] = \lim_{z\to i}\left[\frac{e^z}{(z+i)(z-i)}(z-i)\right] = \frac{e^i}{2i}$$

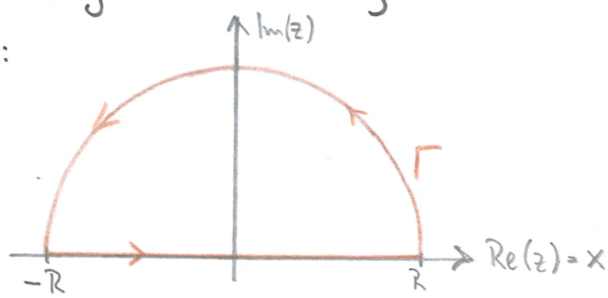
$$\mathrm{Res}_{z_0^{(2)}}[f(z)] = \dots = -\frac{e^{-i}}{2i}$$

$$\Rightarrow \oint_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{e^i}{2i} - \frac{e^{-i}}{2i}\right) = \underline{\underline{2\pi i \sin(1)}},\text{ unabhg. von } R$$

(ii) Anwendung auf reelle Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

$\rightarrow$ brauchen stetige Fortsetzung $f(z)$ von $f(x)$ auf $\mathbb{C}$

$\rightarrow$ betrachten:



(keine Pole auf der reellen Achse)

kennen Integral über Γ aus Residuensatz (da geschl. Kurve); andererseits setzt sich Γ zusammen aus der Strecke $[-R,R]$ und dem Halbkreis:
$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{HK} f(z)\,dz$$

d.h.: können durch Limes $R \to \infty$ das Integral

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ bestimmen, falls $\lim_{R \to \infty} \int_{HK} f(z)\,dz$ bekannt ist

Man kann zeigen, das das Integral über den HK für $R \to \infty$ verschwindet, falls $|f(z)|$ mindestens wie $1/R^2$ fällt.

Diese Bedingung legt zumeist fest, ob man den HK in die obere oder untere Hälfte der komplexen Zahlenebene legen muss.