Die Green'sche Funktion

Mit Hilfe Green'scher Funktionen können Lösungen gewöhnlicher oder partieller Differentialgleichungen mit oder ohne Randbedingungen dargestellt werden.

Sei $\hat{L}$ ein linearer Differentialoperator. Die definierende Eigenschaft einer Green'schen Funktion $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ ist:

$$\boxed{\hat{L}\, G(\vec{r},\vec{r}\,') = \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,')\;.} \qquad (+\text{ Randbedingungen})$$

Damit lässt sich eine lineare Differentialgleichung der Form

$$\hat{L}\,\phi(\vec{r}) = f(\vec{r})$$

äquivalent als Integralgleichung darstellen:

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3\vec{r}\,'\; G(\vec{r},\vec{r}\,')\, f(\vec{r}\,')\,.$$

<u>Bem.</u> Mathematisch gesprochen handelt es sich um eine <u>Faltung</u>, $\phi(\vec{r}) = (G * f)(\vec{r})$; mehr dazu im Kontext der Fourier-Transformation.

Interpretation: Die Green'sche Funktion gibt die „Antwort" eines Systems auf eine scharf konzentrierte Anregung; daher auch „Response-Funktion" genannt.

$$G(\vec{r},\, \vec{r}\,')$$

Reaktion des Systems am Ort $\vec{r}$ — δ-förmige Anregung des Systems am Ort $\vec{r}\,'$

Die allgemeine Lösung ergibt sich als Superposition solcher δ-förmigen Anregungen.
$G(\vec{r},\vec{r}')$ enthält Informationen über den Differentialoperator und die Geometrie (Randbedingungen) des Systems. $\longrightarrow$ Abstraktion von den Quellen

<u>Beispiele:</u>

- getriebener harmonischer Oszillator

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = F(t) \,,$$

Anfangsbedgn.: $\quad x(t=0) = x_0 \,,$
$\qquad\qquad\qquad\;\; \dot{x}(t=0) = v_0$

$\longrightarrow$ allgemeine Lösung:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + \int_0^t d\tau \; G(t,\tau)\, F(\tau)$$

$$\text{mit} \quad G(t,\tau) = \frac{\sin(\omega(t-\tau))}{\omega}$$

- elastischer Stab unter Einfluss einer äußeren Kraft

$$-\kappa \, y''(x) = f(x) \,,$$

Randbedingungen: $\quad y(0) = 0 \,, \quad y(l) = 0$

(κ: Materialkonst., f: Kraftdichte, l: Stablänge)

$\longrightarrow$ allgemeine Lösung:

$$y(x) = \int_0^l d\xi \; G(x,\xi)\, f(\xi) \,, \qquad G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{(l-\xi)x}{l\kappa} \,, & 0 \le x \le \xi \le l \\[2ex] \dfrac{(l-x)\xi}{l\kappa} \,, & 0 \le \xi < x \le l \end{cases}$$

• Ladungsdichte vor leitender Ebene

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta\phi(\vec{r}) = \varrho(\vec{r}),$$

Randbedingungen: $\phi(\vec{r}\to\infty) = 0$,

$$\phi(\vec{r})\Big|_{\vec{r}\in \text{Ebene}} = 0$$

$\longrightarrow$ Lösung: $\phi(\vec{r}) = \int d^3r'\, G(\vec{r},\vec{r}\,')\,\varrho(\vec{r}\,')$

mit $G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_s(\vec{r}\,')|}$

(Superposition zweier Punktladungen mit $q=1$ und $q=-1$; $\vec{r}_s(\vec{r}\,')$: Spiegelung von $\vec{r}\,'$ an der Ebene)

Im Folgenden soll die Green'sche Funktion in der Elektrostatik behandelt werden.

lineare Differentialgleichung: $-\frac{1}{4\pi}\Delta\phi(\vec{r}) = \varrho(\vec{r})$

Randbedingungen:

1. natürliche Randbedingungen (d.i. Null im Unendlichen)
2. Randbedingungen im Endlichen (Leiter)

$\longrightarrow$ allgemeine Lösung:

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \int d^3r'\, G(\vec{r},\vec{r}\,')\,\varrho(\vec{r}\,')}$$

Zerlegung der Green'schen Funktion:

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = G_0(\vec{r},\vec{r}\,') + G_1(\vec{r},\vec{r}\,')$$

G_0: erfüllt die natürlichen RB und:

$$-\frac{1}{4\pi}\Delta_{\vec{r}}\, G_0(\vec{r},\vec{r}\,') = \delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

G_1: implementiert RB im Endlichen und: $\Delta_{\vec{r}}\, G_1(\vec{r},\vec{r}\,') = 0$

kennen bereits $G_0(\vec{r},\vec{r}\,') = \dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$, da $\Delta_{\vec{r}}\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}\,')$

Aus der 2. Green'schen Identität,

$$\int_V dV\,(\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi) = \int_{\partial V} d\vec{f}\,(\phi\,\mathrm{grad}\,\psi - \psi\,\mathrm{grad}\,\phi),$$

folgt für $\psi = G(\vec{r},\vec{r}\,')$:

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3r'\, G(\vec{r},\vec{r}\,')\,\varrho(\vec{r}\,') + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} d^2r' \left(\phi(\vec{r}\,')\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'} - G(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{\partial\phi(\vec{r}\,')}{\partial n'}\right).$$

mit $\dfrac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'} = \left(\vec{n}(\vec{r}\,')\,\mathrm{grad}_{\vec{r}\,'}\right) G(\vec{r},\vec{r}\,')$: Ableitung in Richtung des Normalenvektors auf ∂V

Wir betrachten ein System aus N Leitern mit Oberflächen ∂V_i $(i=1,\dots,N)$.

1. <u>Dirichlet-Randwertproblem:</u>
Die (konstanten) Potentiale ϕ_i auf den Leiteroberflächen sind vorgegeben.

2. <u>von-Neumann-Randwertproblem:</u>
Die Normalenableitungen der Potentiale $\frac{\partial \phi_i}{\partial n_i}$ auf den Leiteroberflächen (d.i. die Oberflächenladungen) sind vorgegeben. Das kann auf das Dirichlet-Problem zurückgeführt werden.

Wir betrachten die Green'sche Funktion für das Dirichlet-Problem, $G_D(\vec{r},\vec{r}\,')$. Es zeigt sich, dass die Forderung

$$G_D(\vec{r},\vec{r}\,')\Big|_{\vec{r}\,'\in\partial V_i} \stackrel{!}{=} 0$$

gestellt werden kann. Damit:

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d^3\vec{r}\,'\; G_D(\vec{r},\vec{r}\,')\,\rho(\vec{r}\,') + \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N} \oint_{\partial V_i} d^2\vec{r}\,'\;\phi_i\,\frac{\partial G_D(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n_i'}\,.$$

In der Abwesenheit von Quellen, $\rho(\vec{r})\equiv 0$, gilt offenbar:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N} f_i(\vec{r})\,\phi_i \quad , \qquad f_i(\vec{r}) = \oint_{\partial V_i} d^2\vec{r}\,'\;\frac{\partial G_D(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n_i'}$$

Die Ladung Q_i auf der Oberfläche des i-ten Leiters ist das Integral über die Ladungsdichte $\sigma(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \phi}{\partial n_i}\Big|_{\partial V_i}$:

$$Q_i = -\frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V_i} d^2\vec{r}\;\frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial n_i} = -\frac{1}{(4\pi)^2}\sum_{j=1}^{N}\oint_{\partial V_i} d^2\vec{r}\oint_{\partial V_j} d^2\vec{r}\,'\;\frac{\partial^2 G_D(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n_i\,\partial n_j'}\,\phi_j\,.$$

Welche Ladung sich in Abhängigkeit der vorgegebenen Potentiale ϕ_j $(j=1,\dots,N)$ auf dem i-ten Leiter einstellt, ist definitionsgemäß durch die <u>Kapazitätskoeffizienten</u> C_{ij} gegeben:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} \, \phi_j \, .$$

Wir können den allgemeinen Ausdruck zur Bestimmung der Kapazitäten aus der Green'schen Funktion ablesen[1]:

$$\boxed{C_{ij} = -\frac{1}{(4\pi)^2} \oint_{\partial V_i} d^2\vec{r} \oint_{\partial V_j} d^2\vec{r}\,' \, \frac{\partial^2 G_D(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n_i \, \partial n_j'}} \, . \qquad (C_{ij} = C_{ji})$$

Damit lässt sich außerdem die in der Anordnung gespeicherte Energie ausdrücken:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3\vec{r} \, \vec{E}(\vec{r})^2 = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3\vec{r} \, \operatorname{grad}\phi(\vec{r}) \, \operatorname{grad}\phi(\vec{r})$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int_V d^3\vec{r} \, \operatorname{div}\Big(\phi(\vec{r}) \, \operatorname{grad}\phi(\vec{r})\Big)$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^{N} \oint_{\partial V_i} d^2\vec{r} \, \phi(\vec{r}) \, \frac{\partial \phi(\vec{r})}{\partial n_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \phi_i \, Q_i$$

$$= \underline{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} C_{ij} \, \phi_i \, \phi_j} \, .$$

<u>Bem.</u>

- $C_{ij} = C_{ji}$ folgt aus $G_D(\vec{r},\vec{r}\,') = G_D(\vec{r}\,',\vec{r})$.
- Für einfache Geometrien kann ein analytischer Ausdruck für die Green'sche Funktion gefunden werden

(bspw. durch die Methode der Spiegelladungen); im Allgemeinen ist das jedoch nicht möglich.

- Oft kann die Green'sche Funktion mittels Fourier- oder Laplace-Transformation auf ein Integral zurückführen.

- In der Quantenfeldtheorie berechnet man Green'sche Funktionen mit Hilfe der berühmten Feynman'schen Pfadintegrale.

1: Beachte: Es zeigt $\vec{n}_i$ aus dem i-ten Leiter <u>hinaus</u> und $\vec{n}'_j$ in den j-ten Leiter <u>hinein</u>!

Begründung: In der Green'schen Identität war mit $\vec{n}'_j$ der Normalenvektor auf ∂V_j gemeint, der konventionsgemäß aus V herauszeigt – mit V ist jedoch nicht der Leiter sondern das ihn umgebende Vakuum gemeint. Im Integral über die Flächenladungsdichte zeigt $\vec{n}_i$ wie gewohnt aus dem Leiter heraus.