Tutorium

Elektrodynamik, 3. Semester

Michel Pannier

Kontakt: michel.pannier@uni-jena.de

Was ist Gegenstand der Elektrodynamik ?

Antwort: Die Maxwell-Gleichungen!

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},t) + \partial_t \vec{B}(\vec{r},t) = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r},t) = 0$$

$$\mathrm{div}\left[\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r},t) + \vec{P}(\vec{r},t)\right] = \varrho_{ext}(\vec{r},t)$$

$$\mathrm{rot}\,\frac{1}{\mu_0}\left[\vec{B}(\vec{r},t) - \vec{M}(\vec{r},t)\right] = \partial_t\left[\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r},t) + \vec{P}(\vec{r},t)\right] + \vec{J}_{makro}(\vec{r},t)$$

Meist: $\vec{D}(\vec{r},t) := \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r},t) + \vec{P}(\vec{r},t)$

$\vec{H}(\vec{r},t) := \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{B}(\vec{r},t) - \vec{M}(\vec{r},t)\right]$

Nur in Materie sind $\vec{P}(\vec{r},t), \vec{M}(\vec{r},t) \neq 0$.

Benennung: $\vec{E}$ – elektr. Feld $\vec{D}$ – dielektr. Verschiebung
$\vec{B}$ – magnet. Feld $\vec{H}$ – magnet. Feldstärke
$\vec{P}$ – Polarisation $\vec{M}$ – Magnetisierung

Die Abhängigkeiten $\vec{P}[\vec{E}]$ bzw. $\vec{M}[\vec{B}]$ werden durch Materialgleichungen gegeben.

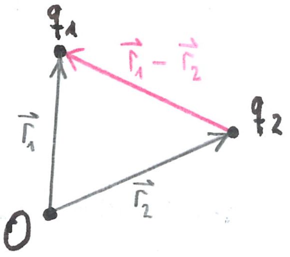
Das sind die Maxwell-Gleichungen in ihrer exaktesten Form.

Was ist $\vec{E}$? – Der Feldbegriff

Rein experimentell gesichert ist die Coulomb-Kraft,

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} ,$$

die paarweise zwischen Punktladungen wirkt.



Superposition mehrerer Ladungen q_i, die auf Ladung q im Ursprung wirken:

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1\vec{r}_1}{r_1^3} + \frac{q_2\vec{r}_2}{r_2^3} + \dots\right) =: q\vec{E} \,.$$

→ Ladungsverteilung (q_1 bei $\vec{r}_1$, q_2 bei $\vec{r}_2$, ...) als Eigenschaft des Raumes, losgelöst von q

→ an jedem Ort und zu jedem Zeitpunkt möglich:

$$\vec{F}(\vec{r},t) =: q\,\vec{E}(\vec{r},t)$$

Man könnte auch sagen: Das $\vec{E}$-Feld ist die Kraft, die auf eine „Testladung" mit $q=1$ wirkt.

Offenbar: $\vec{E} \in \mathbb{R}^3$.

Später aber auch $\vec{E} \in \mathbb{C}^3$, dann ist nur $\mathrm{Re}(\vec{E})$ physikalisch sinnvoll!

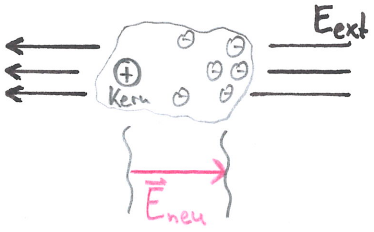
Was ist $\vec{P}$? – Elektrostatik im Medium

Ein Atom ist im elektrischen Feld einer Kraft ausgesetzt. Die Auslenkung der Elektronen aus ihrer Ruhelage um den Atomkern führt zur Ausbildung elektrischer Pole.

→ neues elektrisches Feld

→ wieder Rückwirkung auf externes Feld

→ u.s.w.



Das Resultat (sozusagen die „Ruhelage") ist ein elektrisches Gesamtfeld, dessen Quellen sowohl externe als auch Polarisationsladungen sind:

$$\mathrm{div}\,\vec{E} \sim \rho_{ext} + \rho_{pol} = \rho_{ges} \,. \qquad (*)$$

Aber wir wissen nichts über ρ_{pol}!

Wir wollen ein Feld beschreiben, dessen Quellen wir kennen! Nennen wir es $\vec{D}$:

$$\operatorname{div} \vec{D} \sim \varrho_{ext} = \varrho_{ges} - \varrho_{pol}.$$

Benennung der Proportionalitätskonstanten in (*) zu $1/\varepsilon_0$.

$$\Rightarrow \quad \operatorname{div} \vec{D} = \varrho_{ext} = \varrho_{ges} - \varrho_{pol} = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} \underbrace{- \varrho_{pol}}_{:= \operatorname{div} \vec{P}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \varrho_{ext}$$

Wissen von $\vec{P}$ nur : $\vec{P} = \vec{P}[\vec{E}]$

Fromme Hoffnung : „$\vec{P} = \chi^{(1)} \vec{E} + \chi^{(2)} \vec{E}^2 + \chi^{(3)} \vec{E}^3 + \dots$"

+ Konvergenz, „$\chi^{(i)} \xrightarrow{i \to \infty} 0$"

→ einfachster Fall : $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$, $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \underbrace{(1 + \chi)}_{\equiv \varepsilon} \varepsilon_0 \vec{E}$

<u>Bem:</u>

- Der Fall quadratischer und höherer Abhängigkeiten führt auf die nichtlineare Optik.
- Niemand garantiert, dass $\vec{E}$ und $\vec{P}$ die gleiche Richtung haben → χ (also auch ε) ist im Allgemeinen ein Tensor!

In dieser Vorlesung schrittweiser Aufbau der Betrachtungen:

Elektrostatik → Magnetostatik ↘

langsam veränderliche Felder

↙

Relativistik ← allgem. Felder

Literatur:
- D. J. Griffiths: „Elektrodynamik. Eine Einführung", Pearson 2011
- R.P. Feynman: „Feynman-Vorlesungen über Physik", Band 2
- Skript Mathem. Methoden der Physik II + III, Prof. Lotze
- Mathematik: I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew: „Taschenbuch der Mathematik", Teubner 2003

Internet: problemsinelectrodynamics.com

Das (skalare) Potential

Die Coulomb-Kraft ist konservativ und es gilt Energieerhaltung.

$\Rightarrow$ Einführung eines Potentials $\phi(\vec{r})$ möglich

Erinnerung Mechanik:

Kraftgesetz $\vec{F}_{12} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$, Potential $\vec{F}(\vec{r}) =: -\text{grad}\, U(\vec{r})$

(Kraft „auf 1 von 2")

Hier beinhaltet das Potential $U(\vec{r})$ die Informationen zur gesamten Anordnung aller beteiligten Massen.

Jetzt Elektrostatik:

Kraftgesetz $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$, Potential $\vec{F}(\vec{r}) =: -q\, \text{grad}\, \phi(\vec{r})$

Hier beinhaltet das Potential $\phi(\vec{r})$ die Informationen zur Anordnung aller Ladungen außer q. Es ist dem Feld zugeordnet, nicht der Kraft, $\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}\, \phi(\vec{r})$!

Bem: Warum ist es möglich, die 3 Komponenten $E_i(\vec{r})$ zu einer skalaren Größe zusammenzufassen, ohne dabei Informationen zu verlieren?

Antwort: Die Komponenten sind nicht unabhängig sondern durch die Maxwell-Gleichungen $\varepsilon_0 \text{div}\, \vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$ und $\text{rot}\, \vec{E}(\vec{r}) = 0$ verbunden!

zur elektrischen Spannung:

Arbeit zum Verschieben einer Ladung q von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ unter Einfluss der Coulomb-Kraft:

$$W = -\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F(\vec r)\, d\vec r = -q \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec E(\vec r)\, d\vec r = q \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \underbrace{\text{grad}\,\phi(\vec r)\, d\vec r}_{d\phi}$$

$$= q\,[\phi(\vec r_2) - \phi(\vec r_1)] =: q\,U(\vec r_1, \vec r_2)$$

→ Spannung als Potentialdifferenz (immer nur zwischen zwei festen Punkten definiert)

einfaches Beispiel zur Potentialberechnung (via $\vec E$-Feld):

Anordnung: gleichmäßig geladene Kugelfläche mit Radius R und Flächenladungsdichte $\eta = \text{const.}$

Maxwell: $\varepsilon_0 \,\text{div}\, \vec E(\vec r) = \rho(\vec r)$

Ladungsverteilung: $\rho(\vec r) = \eta\, \delta(r-R)$

Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) mit Ursprung im Zentrum der Kugelschale

Ansatz: Integration über eine Kugel mit (beliebigem) Radius r

$$\varepsilon_0 \int_{B_r} \text{div}\, \vec E(\vec r')\, dV' = \int_{B_r} \rho(\vec r')\, dV'$$

$$\parallel \quad \text{(Gauß)}$$

$$\varepsilon_0 \int_{\partial B_r} \vec E(\vec r')\, d\vec f'$$

Skalarprodukt der parallelen Vektoren

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \vec E(\vec r)\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, \vec e_r = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{B_r} \eta\, \delta(r'-R)\, dV' = q, & r \geq R \\ 0, & r < R \end{cases}$$

Zur Berechnung der linken Seite beachte Kugelsymmetrie des $\vec{E}$-Feldes:

$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \vec{E}(r) \neq \vec{E}(r,\vartheta,\varphi)$; auf einer Kugelschale mit konstantem Radius ist das Feld konstant.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \vec{E}(\vec{r})\, r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, \vec{e}_r = r^2 \vec{E}(r)\, \vec{e}_r \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}_{4\pi}$$

$\Rightarrow$ innen: $\vec{E}(r) \equiv 0 \quad , \quad r < R$

außen: $\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \quad , \quad r \geq R$

Nun zum Potential, $\vec{E}(r) = -\text{grad}\, \phi(\vec{r})$:

Wieder gebietet Kugelsymmetrie $\phi(\vec{r}) \equiv \phi(r) \neq \phi(r,\vartheta,\varphi)$!

$$\rightarrow \text{grad}\, \phi(r) = \partial_r \phi(r)\, \vec{e}_r + \underbrace{\left(\frac{1}{r} \partial_\vartheta \phi(r)\, \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin\vartheta} \partial_\varphi \phi(r)\, \vec{e}_\varphi\right)}_{\equiv 0}$$

$$\rightarrow \phi(r) = \int^{r} \partial_{r'} \phi(r')\, dr' = \int^{r} \text{grad}\, \phi(r')\, dr'\, \vec{e}_r = -\int^{r} \vec{E}(r')\, dr'\, \vec{e}_r$$

wählen Bezugspunkt im ∞ mit $\phi(r=\infty) \overset{!}{=} 0$

$$= -\int_{\infty}^{r} \vec{E}(r')\, dr'\, \vec{e}_r$$

$$= \begin{cases} -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r'^2}\, dr' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \quad , & r \geq R \\ -\int_{\infty}^{R} \vec{E}(r')\, dr'\, \vec{e}_r - \int_{R}^{r} \vec{E}(r')\, dr'\, \vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R} \quad , & r < R \end{cases}$$

Ergebnisse:

- Von außen sind Feld und Potential nicht von denen einer Punktladung unterscheidbar, die im Zentrum sitzt.

- Die Ausnutzung der Kugelsymmetrie macht die Potentialberechnung unverschämt einfach.

Bem: Ein „direkter" Weg führt zur Laplace-Gleichung (bzw. Poisson-Gleichung).

$$\rho(\vec{r}) = \varepsilon_0 \,\mathrm{div}\, \vec{E}(\vec{r}) = \cancel{\varepsilon_0 \,\mathrm{grad}} - \varepsilon_0 \underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\Phi(\vec{r})}_{\Delta\Phi(\vec{r})}$$

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$ Poisson-Gleichung (auf der Kugelschale $\rho(\vec{r} = R\vec{e}_r) \neq 0$)

Im Ladungsfreien Raum ist $\rho(\vec{r} \neq R\vec{e}_r) \equiv 0$ und damit

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = 0$$ Laplace-Gleichung (innerhalb und außerhalb).

Es muss hierbei die Laplace-Gleichung mit den richtigen Randbedingungen gelöst werden.

Überblick Elektrostatik

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\begin{array}{c}\text{Ladungsdichte}\\ \varrho(\vec r)\end{array}} \arrow[dl, shift right, "\phi(\vec r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\varrho(\vec r')\,dV'"'] \arrow[dr, shift left, "\vec E(\vec r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\vec r-\vec r'}{|\vec r-\vec r'|^3}\varrho(\vec r')\,dV'"] & \\
\boxed{\begin{array}{l}\text{elektrostat. Po-}\\ \text{tential }\phi(\vec r)\end{array}} \arrow[ur, shift right, "\varrho(\vec r)=-\varepsilon_0\Delta\phi(\vec r)"'] \arrow[rr, shift left, "\vec E(\vec r)=-\text{grad}\,\phi(\vec r)"] & & \boxed{\begin{array}{c}\text{elektrost. Feld}\\ \vec E(\vec r)\end{array}} \arrow[ul, shift left, "\varrho(\vec r)=\varepsilon_0\,\text{div}\,\vec E(\vec r)"] \arrow[ll, shift left, "\phi(\vec r)=-\int^{\vec r}\vec E(\vec r')\,d\vec r'"]
\end{tikzcd}$$

Wie erhält man die Umkehrung von Divergenz und Laplace-Operator allgemein?

Integration über beliebiges Volumen V und Volumen der Ladungsverteilung V_ϱ:

$$\varepsilon_0\,\text{div}\,\vec E(\vec r) = \varrho(\vec r) \qquad \Big| \int_V dV$$

$$\varepsilon_0\int_V \text{div}\,\vec E(\vec r)\,dV \overset{(\text{Gauß})}{=} \int_V \varrho(\vec r)\,dV = \int_V\int_{V_\varrho}\varrho(\vec r')\,\delta(\vec r-\vec r')\,dV'\,dV$$

$$\int_{\partial V}\vec E(\vec r)\,d\vec f = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V\int_{V_\varrho}\varrho(\vec r')\,\delta(\vec r-\vec r')\,dV'\,dV$$

$$\longleftarrow \delta(\vec r-\vec r') = -\frac{1}{4\pi}\Delta_r\frac{1}{|\vec r-\vec r'|} \quad \text{(siehe später!)}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\int_{V_\varrho}\varrho(\vec r')\,\text{div}_r\,\text{grad}_r\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\,dV'\,dV$$

(Gauß)

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint\limits_{\partial V\; V_\varrho} \varrho(\vec r\,')\; \mathrm{grad}_r \frac{1}{|\vec r-\vec r\,'|}\, dV'\, d\vec f \qquad (*)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint\limits_{\partial V\; V_\varrho} \frac{\vec r-\vec r\,'}{|\vec r-\vec r\,'|^3}\, \varrho(\vec r\,')\, dV'\, d\vec f$$

(V beliebig)
=>

$$\underline{\underline{\vec E(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{V_\varrho} \frac{\vec r-\vec r\,'}{|\vec r-\vec r\,'|^3}\, \varrho(\vec r\,')\, dV'}}$$

Für (*) kann man schreiben

$$\vec E(\vec r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{V_\varrho} \varrho(\vec r\,')\; \mathrm{grad}_r \frac{1}{|\vec r-\vec r\,'|}\, dV'$$

$$= -\mathrm{grad}_r \left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{V_\varrho} \frac{1}{|\vec r-\vec r\,'|}\, \varrho(\vec r\,')\, dV'\right] = -\mathrm{grad}\, \phi(\vec r)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{V_\varrho} \frac{1}{|\vec r-\vec r\,'|}\, \varrho(\vec r\,')\, dV'}}$$

<u>NR:</u>

$$\underline{\mathrm{grad}_r \frac{1}{|\vec r-\vec r\,'|}} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\, \frac{1}{\sqrt{\dots}^{\,3}} \begin{pmatrix} 2(x-x') \\ 2(y-y') \\ 2(z-z') \end{pmatrix} = \underline{-\frac{\vec r-\vec r\,'}{|\vec r-\vec r\,'|^3}}$$

Zur Dirac'schen δ-Distribution

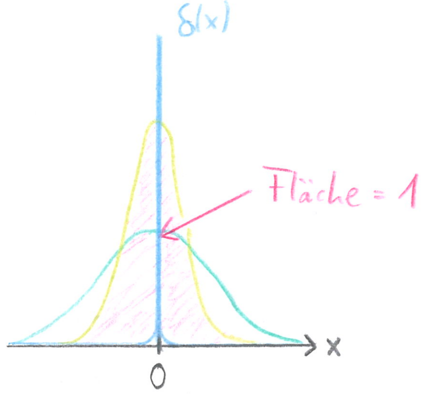
exakte Behandlung: Distributionentheorie

Als strenge Definition genügt $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\, f(x)\, d^n x := f(0)$

bzw. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(x-x_0)\, f(x)\, d^n x = f(x_0)$.

formal: $$\delta(x) = \begin{cases} \infty\,, & x = 0 \\ 0\,, & x \neq 0 \end{cases}$$

Normierung: $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$



Bsp: Massenpunkt mit Masse $m = 1$ am Ort $\vec{r}_0$

Massendichte: $$\rho(\vec{r}) = m\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \begin{cases} \infty\,, & \vec{r} = \vec{r}_0 \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

Gesamtmasse: $$m_{gs} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r})\, dV = \int\limits_{\mathbb{R}^3} m\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\, d^3\vec{x} = m$$

Eigenschaften:

- $\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\,\delta(x)$, insbesondere $[\delta(x)] = \frac{1}{[x]}$
- Ableitung: $$\frac{d^n}{dx^n}\,\delta(x) = (-1)^n\, \delta(x)\, \frac{d^n}{dx^n}$$

Beweis: (n=1) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}[\delta(x)]\, f(x)\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{partielle Integration}}}{=} \Big[\delta(x)\, f(x)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, \frac{d}{dx} f(x)\, dx$$

- $\delta(x) = \delta(-x)$
- $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)$
- δ-Distribution einer Funktion:

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{1}{|\partial_x f(x)|_{x_i}}\,\delta(x-x_i)$$

für x_i Nullstellen von $g(x)$, $g(x_i)=0 \ \forall i$

Darstellungen der δ-Distribution:

- $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}_0)}\, d^3\vec{k}$ Fourier-Integral

→ Modellierung eines Punktes erfordert Hinzunahme <u>aller</u> Ortsfrequenzen $\vec{k}$ im Fourier-Raum

- $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = -\frac{1}{4\pi}\,\Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$

Übergang zu Kugelkoordinaten:

$$1 \overset{!}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{r})\, d^3\vec{r} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\infty} \delta(\vec{r}) \sin\vartheta\, r^2\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = 4\pi \int\limits_0^{\infty} \delta(\vec{r})\, r^2\, dr$$

$$\left.\begin{aligned} &= 4\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r})\, r^2\, dr \\ 1 &\overset{!}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(r)\, dr \end{aligned}\right\} \quad \delta(\vec{r}) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}$$

Im Zweifelsfall sollte man stets die integrale Definition plus Normierung heranziehen!

Zur Green'schen Funktion

Für eine lineare Differentialgleichung der Form

$$\hat{L}\, x(\vec{r}) = f(\vec{r})$$

mit einem Differentialoperator $\hat{L}$ (z.B. $\hat{L} = \text{grad}$) und einer Inhomogenität $f(\vec{r})$ lässt sich allgemein die Green'sche Funktion einführen mittels der Eigenschaft

$$\underline{\hat{L}\, G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,').}$$

→ neue Darstellung der Differentialgleichung als Integralgleichung:

$$x(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}\,')\, f(\vec{r}\,')\, dV' \qquad (*)$$

denn: $\hat{L}\, x(\vec{r}) = \int_V \underbrace{\hat{L}\, G(\vec{r}, \vec{r}\,')}_{\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')}\, f(\vec{r}\,')\, dV' = f(\vec{r})$, beide Darstellungen sind äquivalent

Es ist $f(\vec{r})$ beliebig, setze z.B. $f(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$. Dann:

$$x(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}\,')\, \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_0)\, dV' = G(\vec{r}, \vec{r}_0).$$

Das heißt: $G(\vec{r}, \vec{r}_0)$ ist eine Lösung des Problems für eine δ-förmige Anregung des Systems (am Punkt $\vec{r}_0$).

→ Daher die Namen „Grundlösung" oder „Response-Funktion" („Antwort" des Systems auf punktförmige Störung).

Damit besagt die Lösungsformel (*): Eine allgemeine Lösung ergibt sich als Superposition scharf konzentrierter äußerer Einflüsse.

$$G(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Reaktion des Systems am Ort } \vec{r}}}{\vec{r}}, \underset{\substack{\uparrow \\ \delta\text{-förmige Anregung am Ort } \vec{r}_0}}{\vec{r}_0})$$

Bem:
- Für eine eindeutige Lösung braucht es noch Randbedingungen, z.B. $G(0,\vec{r}_0) \overset{!}{=} 0$.
- Veranschaulichung: fest eingespanntes Gummiband
- Das funktioniert nicht nur auf dem $\mathbb{R}^3$.

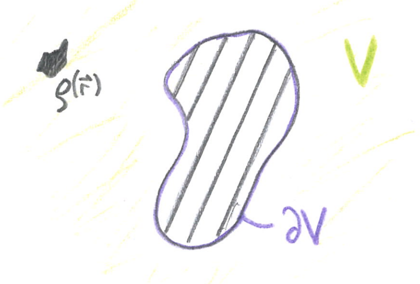
Anwendung auf Elektrostatik:

Poisson-Gleichung:

$$-\varepsilon_0 \, \Delta \phi(\vec{r}) = \varrho(\vec{r})$$

(auf einem Gebiet $V \subseteq \mathbb{R}^3$)

+ Randbedingung(en), z.B. $\phi(\vec{r})\Big|_{\vec{r}\in\partial V} \overset{!}{=} 0$ für (geerdete) Leiter



Wir wählen natürliche RB (d.h. $\phi(\vec{r})$ verschwindet im Unendlichen, keine Leiter anwesend) und suchen zugehörige Green'sche Funktion $G_0(\vec{r},\vec{r}\,')$ mit $-\varepsilon_0 \, \Delta G_0(\vec{r},\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$, sodass $\phi(\vec{r}) = \int_V G(\vec{r},\vec{r}\,')\,\varrho(\vec{r}\,')\,dV'$ eine Lösung ist.

Wegen $\Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$ löst $G_0(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ das Problem. (Beachte RB: $G_0 \xrightarrow{|\vec{r}|\to\infty} 0$)

$$\rightarrow \underline{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\varrho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV'}$$

Bei Anwesenheit von Leitern wählt man den Ansatz

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{natürliche} \\ \text{Randbedg.}}}{G_0(\vec{r},\vec{r}\,')} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Randbedg. im} \\ \text{Endlichen (Leiter)}}}{F(\vec{r},\vec{r}\,')} \quad , \quad \Delta F(\vec{r},\vec{r}\,') = 0 .$$

Bem: $G_0(\vec{r},\vec{r}\,')$ ist das Potential einer Punktladung der Ladung $q=1$ am Ort $\vec{r}\,'$.

Das Gauß'sche cgs-System (Zentimeter, Gramm, Sekunde)

Ausgangspunkt: 3 grundlegende experimentelle Befunde

Coulomb: $F = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2}$ (1)

Ampère: $F = k_2 \frac{2 I_1 I_2 L}{d}$ (2)

Faraday: $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -k_3 \partial_t \vec{B}$ (3)

Welche Einheiten ordnet man (per Definition) Ladung, Strom und Feld zu?

Die Verknüpfung „Strom ~ Ladung / Zeit" erlaubt den (experimentellen) Vergleich von (1) & (2). Befund: $\frac{k_1}{k_2} = c^2$.

1. Möglichkeit (SI):

Wirkt für $d = 1\,\mathrm{m}$ und $L = 1\,\mathrm{m}$ eine Kraft F von $2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$ (mit $\mathrm{N} = \frac{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$), nennen wir das, was durch die Drähte fließt, jeweils 1 Ampère.

Damit: $2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N} = 2 k_2 \mathrm{A}^2$

$$\Rightarrow \underline{k_2 = 1 \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} =: \frac{\mu_0}{4\pi}}$$

$$\Rightarrow \underline{k_1} = k_2 c^2 = 8{,}988 \cdot 10^9 \frac{\mathrm{N m}^2}{\mathrm{A}^2 \mathrm{s}^2} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{8{,}854 \cdot 10^{-12}} \frac{\mathrm{N m}^2}{\mathrm{A}^2 \mathrm{s}^2} =: \underline{\frac{1}{4\pi \varepsilon_0}}$$

Außerdem: $k_3 \overset{!}{=} 1$

2. Möglichkeit (cgs):

Wirkt für $r = 1\,\text{cm}$ eine Coulomb-Kraft F von $1\,\text{dyn}$ (mit $\text{dyn} = \frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2} = 10^{-5}\,\text{N}$), dann nennen wir das, was q_1 und q_2 sind, jeweils 1 esu.

$$\overset{!}{\Rightarrow} \underline{k_1 = 1} \qquad \Rightarrow \underline{k_2 = \frac{1}{c^2}} \quad , \qquad \underline{k_3 \overset{!}{=} \frac{1}{c}}$$

Daraus folgen Einheiten und Umrechnungsfaktoren aller anderen physikalischen Größen.

Bsp: Ladung Betrachte dieselbe physik. Situation in beiden Systemen.

$$q \overset{1\text{m}}{\underset{F = 1\text{N}}{\longleftrightarrow}} q \qquad \text{„Wie groß ist } q\text{?“}$$

- SI:

$$F = k_1 \frac{q^2}{r^2} \quad , \qquad k_1 = c^2 k_2 = c^2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

$$\rightarrow q^2 = 1\text{N} \cdot (1\text{m})^2 \frac{1}{c^2} \cdot 10^7 \frac{\text{A}^2}{\text{N}} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{C} \equiv \text{As}}}{=} \underline{\frac{1}{|c|^2} \cdot 10^7\, \text{C}^2}$$

- cgs:

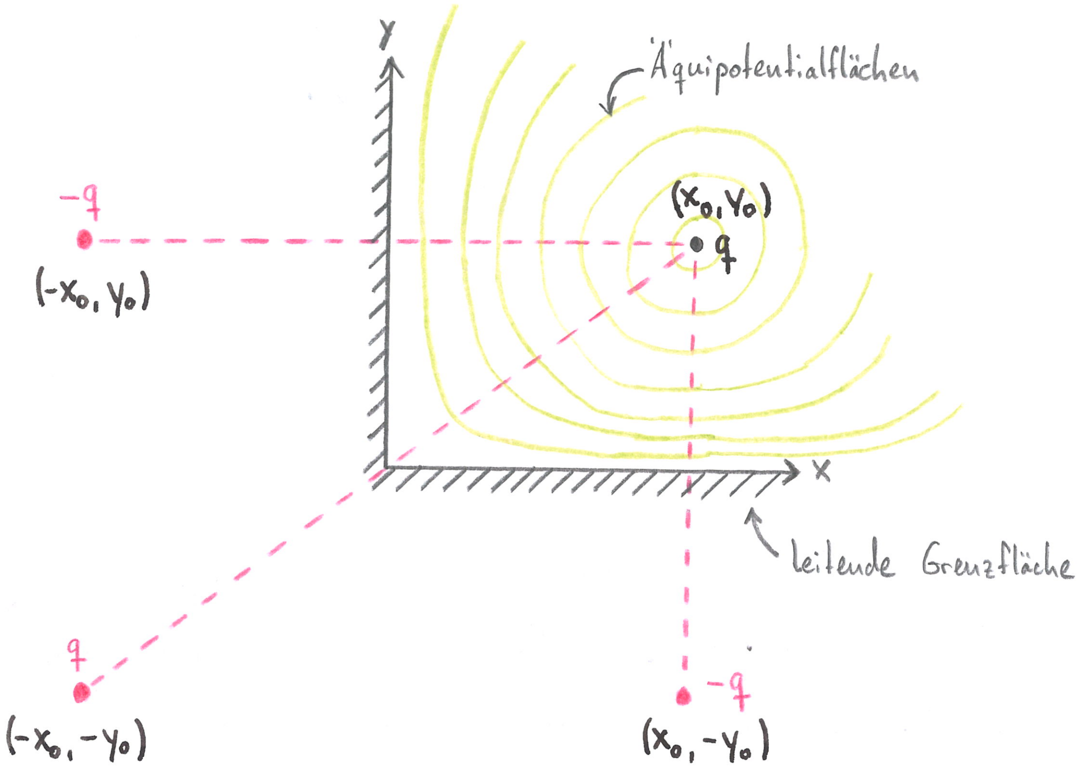
$$F = \frac{q^2}{r^2} \quad , \qquad 1\text{N} = 10^5\,\text{dyn}$$

$$\rightarrow q^2 = 10^5\,\text{dyn} \cdot (100\,\text{cm})^2 = 10^9\,\text{dyn} \cdot \text{cm}^2 = \underline{10^9\,\text{esu}^2}$$

Vergleich: $\underline{\text{C} = 10 \cdot |c|\,\text{esu}} = 10^9 \alpha\,\text{esu} \quad , \quad \alpha \equiv |c| \cdot 10^{-8} \approx 3$

Bem:
- Vorsicht! Oft sind Definitionen von Größen wie $\vec{D}, \vec{H}, \chi, \dots$ verschieden (da sie ja der Abkürzung dienen).
- Übersicht zur Umrechnung in D. J. Griffiths: „Elektrodynamik. Eine Einführung“, Pearson 2011, Anhang C

Beispiel zur Methode der Spiegelladungen



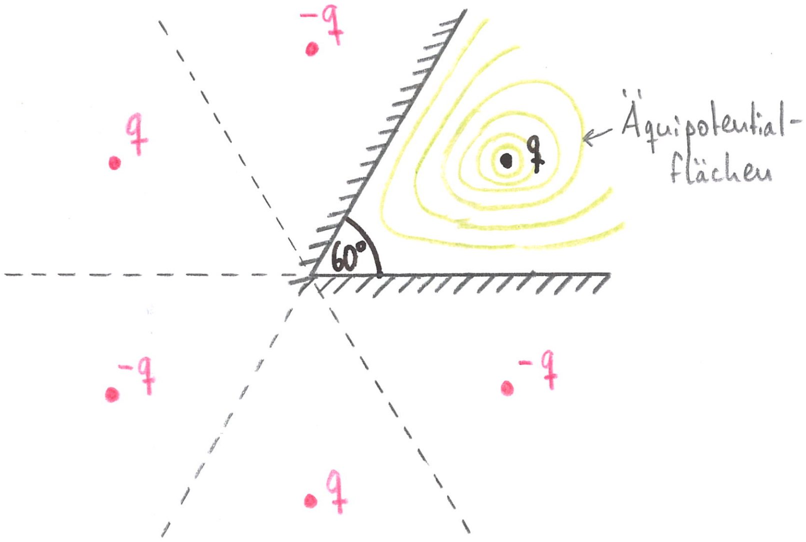
Die dritte Spiegelladung ist notwendig, um auf der Grenzfläche $\phi = 0$ zu erreichen.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2}} \right]$$

Das gilt im 1. Quadranten.

<u>Test:</u> $\phi(x=0, y) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x_0^2 + (y-y_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + (y-y_0)^2}} \pm \dots \right] = \underline{\underline{0}}$



Hier sind ganzzahlige Teiler von 360° nötig.

Um $\phi = 0$ erreichen zu können, braucht man stets eine ungerade Anzahl an Spiegelladungen.

Die Laplace-Gleichung

$\Delta\phi(\vec{r}) = 0$ in Gebieten ohne Ladung (nicht absolutes Vakuum!)

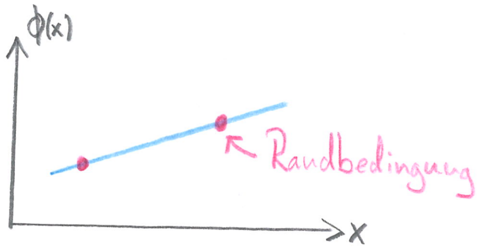
Dimension 1: $\partial_x^2 \phi(x) = \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = 0 \Rightarrow \phi(x) = ax + b$, $a,b = \text{const}$

Das ist simpel... dennoch zwei Feststellungen:

1. Für alle x und α beliebig gibt $\phi(x)$ den Mittelwert von $\phi(x-\alpha)$ und $\phi(x+\alpha)$ an, insbesondere für beliebig kleine α: $\phi(x) = \frac{\phi(x-dx) + \phi(x+dx)}{2}$.

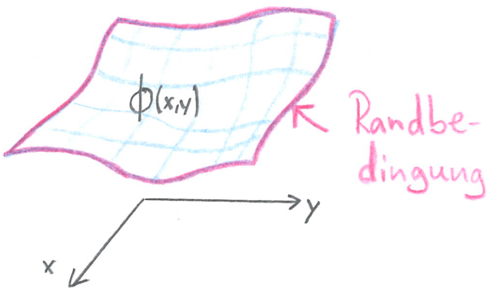
2. Es sind keine lokalen Maxima oder Minima erlaubt.

Lösung eindeutig bestimmt durch zwei feste Punkte oder einen Stützpunkt + Ableitung



Dimension 2: $\partial_x^2 \phi(x,y) + \partial_y^2 \phi(x,y) = 0$

Anschauung: Gummituch,
fest eingespannt



Es gelten dieselben Eigenschaften:

1. Mittelwert:

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2\pi R} \oint_R \phi(x',y')\, ds'$$

2. keine lokalen Maxima/Minima

Dimension 3 : $\partial_x^2 \phi(x,y,z) + \partial_y^2 \phi(x,y,z) + \partial_z^2 \phi(x,y,z) = 0$

1. Mittelwert - Eigenschaft:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{S_R} \phi(\vec{r}\,')\, df'$$

2. keine lokalen Extrema

Die 2. Eigenschaft folgt jeweils aus der ersten.

Die Laplace - Gleichung beschreibt den „Endzustand" eines Systems; alle Störungen sind abgeklungen.

→ Numerik: Relaxationsmethode zur Lösung (wiederholte Mittelwertbildung)

Aus der 2. Eigenschaft folgt das Earnshaw - Theorem :

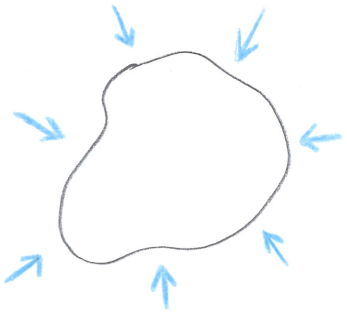
Ein geladenes Teilchen kann nicht allein durch elektrostatische Kräfte in einem stabilen Gleichgewicht gehalten werden.

Plausibilitätsbetrachtung: Suche nach einem Gebiet, in das alle Feldlinien hinein zeigen

Gauß'scher Satz: Ladung im Inneren!

=> für beliebig kleines Gebiet:

Der einzige Ruhepunkt ist die Ladung selbst!



Lösung der Laplace-Gleichung unter Ausnutzung von Symmetrien:

1. Zylinderkoordinaten

$$\Delta\phi(r,\varphi,z) = \frac{1}{r}\partial_r\left(r\,\partial_r\phi\right) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\phi + \partial_z^2\phi = 0$$

Rotationssymmetrie um die z-Achse : $\phi = \phi(r,z)$

+ Symmetrie gegen Verschiebung der z-Achse: $\phi = \phi(r)$

$$\partial_r\left(r\,\partial_r\phi\right) = 0$$

$$\rightarrow \partial_r\phi = \frac{a}{r} \quad , \quad a = \text{const}$$

$$\rightarrow \underline{\phi(r) - \phi(r_0) = a\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}$$

- Die Konstanten a und r_0 (bzw. $\phi(r_0)$) regeln die Rand- und Übergangsbedingungen.
- Wegen der unendlichen Ausdehnung in z-Richtung können keine natürlichen RB angenommen werden, $\phi \xrightarrow{r\to\infty} \infty$.

2. Kugelkoordinaten

$$\Delta\phi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\phi\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\partial_\vartheta\left(\sin\vartheta\,\partial_\vartheta\phi\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2\phi$$

Rotationssymmetrie um alle Achsen : $\phi = \phi(r)$

$$\partial_r\left(r^2\partial_r\phi\right) = 0$$

$$\rightarrow \partial_r\phi = \frac{a}{r^2} \quad , \quad a = \text{const}$$

$$\rightarrow \underline{\phi(r) - \phi(r_0) = -a\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

- Für nat. RB gilt $r_0 = \infty$, $\phi(r_0) = 0$: $\phi(r) = -\frac{a}{r}$.
- Bsp. Punktladung : $a = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$

Eindeutigkeitssatz:

Hat man (unter Einbeziehung der RB) eine Lösung der Laplace-Gleichung gefunden, dann ist es die einzige.

Separationsansatz in sphärischen Koordinaten

betrachten azimutale Symmetrie : $\Phi = \Phi(r,\vartheta)$

$$\Delta\Phi = \partial_r\left(r^2\partial_r\Phi\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\partial_\vartheta\left(\sin\vartheta\,\partial_\vartheta\Phi\right) = 0$$

Separationsansatz: $\Phi(r,\vartheta) = R(r)\,\Theta(\vartheta)$

$$\rightarrow \Theta(\vartheta)\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{R(r)}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}_{\text{nur } r\text{-abhängig}} = \underbrace{-\frac{1}{\Theta(\vartheta)\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right)}_{\text{nur } \vartheta\text{-abhängig}}$$

$\Rightarrow$ Beide Seiten sind unabhängig voneinander konstant!

LHS: $\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = \text{const.}\cdot R(r) = l(l+1)R(r)$, $l \in \mathbb{N}_0$
(nur spezielle Bezeichnung der Konstanten...)

allgemeine Lösung: $\underline{R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}}}$, A,B const

RHS: $\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{d\Theta}{d\vartheta}\right) = -\Theta(\vartheta)\sin\vartheta\cdot\text{const} = -l(l+1)\,\Theta(\vartheta)\sin\vartheta$

allgemeine Lösung: Legendre-Polynome P_l
$\underline{\Theta(\vartheta) = P_l(\cos\vartheta)}$

$\Rightarrow$ allgemeinste separierbare Lösung:

$$\underline{\Phi_l(r,\vartheta) = \left[Ar^l + Br^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\vartheta)} \quad \text{für alle } l \in \mathbb{N}_0$$

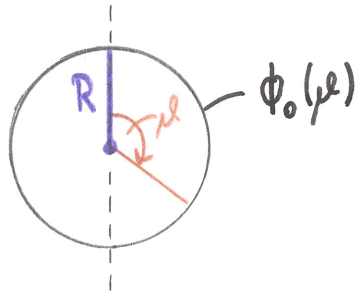
$\Rightarrow$ gesamte Lösung als Linearkombination:

$$\underline{\underline{\Phi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\vartheta)}}$$

Was ist mit dem Eindeutigkeitssatz?

Die RB werden durch das Set A_l, B_l eingeregelt, l nummeriert nur die Basisfunktionen des Lösungsraumes.

Ein Bsp.: Potential im Inneren einer Kugel



1.) $\Phi(r=0) \overset{!}{<} \infty$

$$\Rightarrow \underline{B_l = 0} \quad \forall l$$

2.) $\Phi(r=R) \overset{!}{=} \Phi_0(\vartheta)$

$$\Downarrow$$

$$\Phi(R,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\vartheta) \overset{!}{=} \Phi_0(\vartheta) \qquad (*)$$

Jetzt einen Trick!

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{n'\pi}{a}y\right) dy = \begin{cases} 0, & n' \neq n \\ a/2, & n' = n \end{cases}$$

ähnlich lässt sich zeigen:

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x)\, dx = \int_0^{\pi} P_l(\cos\vartheta) P_{l'}(\cos\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta = \begin{cases} 0, & l' \neq l \\ \frac{2}{2l+1}, & l' = l \end{cases}$$

Multipliziere (*) mit $P_{l'}(\cos\vartheta)$ und integriere:

$$A_{l'} R^{l'} \frac{2}{2l'+1} = \int_0^{\pi} \Phi_0(\vartheta) P_{l'}(\cos\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta$$

→ Bestimmungsgleichung für die Koeffizienten $A_{l'}$

Damit ist das Problem gelöst!

Etwas Magnetostatik

Maxwell-Gleichungen des Magnetfeldes:

$$\mathrm{div}\,\vec B(\vec r) = 0 \qquad (1)$$

$$\mathrm{rot}\,\frac{1}{\mu_0}\Big[\vec B(\vec r) - \underbrace{\vec M(\vec r)}_{\substack{=0 \\ \text{(im Vakuum)}}}\Big] = \underbrace{\partial_t\Big[\varepsilon_0 \vec E(\vec r) + \vec P(\vec r)\Big]}_{\substack{=0 \\ \text{(Statik)}}} + \vec j_{\text{makro}}(\vec r) \qquad (2)$$

Einführung des Vektorpotentials:

$$\vec B(\vec r) =: \mathrm{rot}\,\vec A(\vec r)$$

→ in (1) verträglich, da $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,. = 0$

→ in (2) folgt $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec A(\vec r) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec A(\vec r) - \Delta \vec A(\vec r) = \mu_0 \vec j(\vec r)$

Coulomb-Eichung: $\mathrm{div}\,\vec A(\vec r) \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \quad \underline{\Delta \vec A(\vec r) = -\mu_0 \vec j(\vec r)} \qquad (*)$$

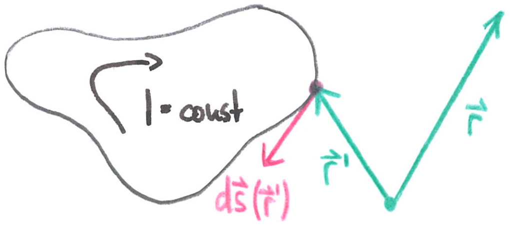
Poisson-Gleichung für das Vektorpotential (3 Gleichungen!)

Das Biot-Savart'sche Gesetz als eine Lösung der Poisson-Gleichung:

Suchen das Magnetfeld eines dünnen stromdurchflossenen Drahtes.

Für natürliche RB ganz analog E-Statik:

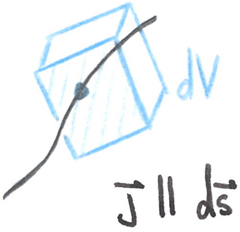
$$\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV' \frac{\vec j(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|} .$$



Mit $\vec j(\vec r')\,dV' = \cancel{d\vec I(\vec r') = I\,d\vec s(\vec r') :}\ \vec j\,dA\,ds$

$$\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\text{Draht}} \frac{d\vec s(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|} .$$

$$\rightarrow \vec B(\vec r) = \mathrm{rot}_{\vec r}\,\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\text{Draht}} \mathrm{rot}_{\vec r}\left(\frac{d\vec s(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}\right)$$



$\vec j \parallel d\vec s$,

$\int j\,dA = I$

Es gilt allgemein $\text{rot}(f\vec{F}) = f\,\text{rot}\,\vec{F} + (\text{grad}\, f) \times \vec{F}$.

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Draht}} \left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \underbrace{\text{rot}_{\vec{r}} \left(d\vec{s}(\vec{r}\,') \right)}_{=0} + \left(\text{grad}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \right) \times d\vec{s}(\vec{r}\,') \right]$$

Nebenrechnung:

$$\text{grad}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\dots}^3} \cdot 2 \begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \\ z-z' \end{pmatrix}$$

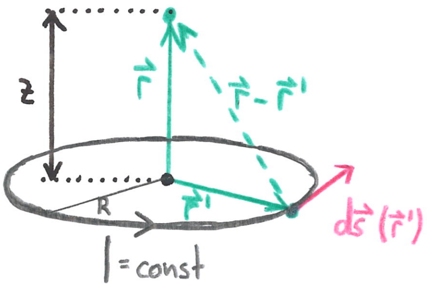
$$= -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Draht}} d\vec{s}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = \underline{\underline{\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Draht}} d\vec{s}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{e}_{(\vec{r}-\vec{r}\,')}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}}}$$

Biot-Savart'sches Gesetz

Anwendungsbeispiel für das Biot-Savart'sche Gesetz

Man bestimme das Magnetfeld in der Höhe z über dem Mittelpunkt einer kreisförmigen, stromdurchflossenen Leiterschleife.



Zylinderkoordinaten: $\vec{r} = z\vec{e}_z \;,\quad \vec{r}\,' = R\vec{e}_r \;,\quad d\vec{s}(\vec{r}\,') = ds\,\vec{e}_\varphi(\vec{r}\,')$

- $d\vec{s}(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,') = ds\;\vec{e}_\varphi(\vec{r}\,') \times \left(z\vec{e}_z - R\vec{e}_r\right) = ds\left(z\vec{e}_r + R\vec{e}_z\right)$
- $|\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{R^2+z^2}$

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}^{\,3}} \int_{\text{Draht}} \left(z\vec{e}_r + R\vec{e}_z\right) ds$$

Bei Integration eines ganzen Umlaufs hebt sich der erste Summand aufgrund der Symmetrie weg, denn $\forall \varphi \in [0,2\pi)$ ex. ein $\vartheta = \varphi \pm \pi$, sodass $\vec{e}_r(\vartheta) = -\vec{e}_r(\varphi)$.

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2}\,\frac{R^2}{\sqrt{z^2+R^2}^{\,3}}\,\vec{e}_z}} \qquad \text{(auf der Symmetrieachse)}$$

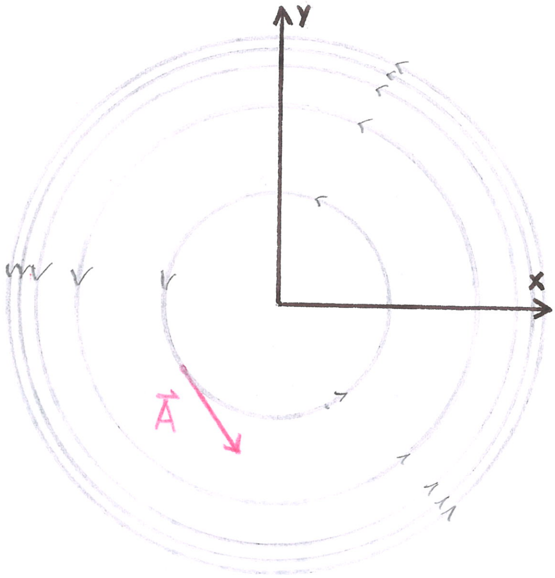
Gedanken zum Vektorpotential und Freiheitsgraden

Bsp.: $\vec B = B\vec e_z$

$$\vec B = \text{rot}\,\vec A = \begin{pmatrix}\partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\B\end{pmatrix}$$

Wählen bspw. $\vec A = \frac{B}{2}\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix}$, in Zylinderkoordinaten:

$$\vec A = \frac{Br}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_{r,\varphi,z}$$



→ hängt empfindlich von der Wahl des Koordinatenursprungs ab

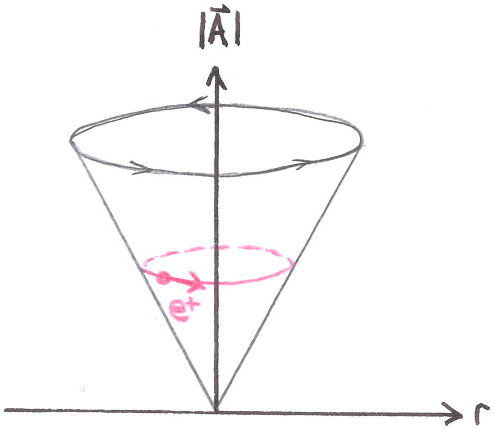
→ wächst linear mit r und divergiert (wg. des unphysikalischen Beispiels)

→ Mittelpunkt ($r=0$, $|\vec A|=0$) beliebig durch Addition von Konstanten verschiebbar

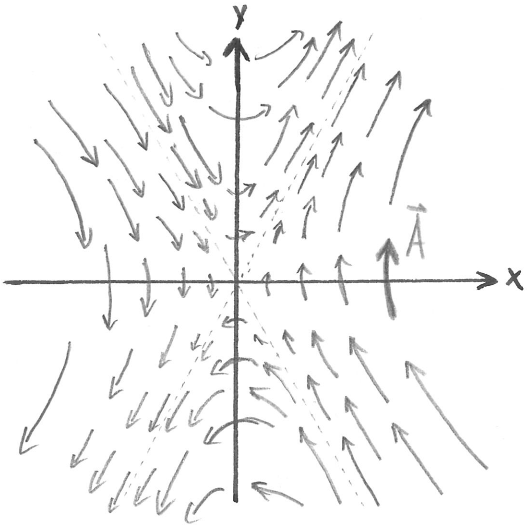
Versuch einer Anschauung:

Bewegung eines geladenen Teilchens „im“ Potential, $\vec F = q\vec v \times \vec B$

Lage im Zylinder abhängig von q, m und v; Drehrichtung abhängig von sgn(q).



Dass die Anschauung im Allgemeinen nicht möglich ist, zeigt die Wahl eines anderen möglichen Potentials : $\vec{A} = B \begin{pmatrix} y \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix}$



Wichtig ist die Diskussion der <u>Freiheitsgrade:</u>

Wie viele Freiheitsgrade hat die Elektrodynamik (im Vakuum)?

6 Feldgrößen (E_x, E_y, E_z), (B_x, B_y, B_z) +
4 Maxwell-Gleichungen = 2 Freiheitsgrade
Tatsächlich: Licht hat 2 Freiheitsgrade (Polarisation)!

Durch die Potentiale ϕ, (A_x, A_y, A_z) haben wir 4 Parameter
=> Redundanzen in den Potentialen
=> können die zwei überflüssigen Größen durch die Wahl einer (bzw. mehrerer) Eichbedingungen fixieren.
z.B.: $\operatorname{div} \vec{A} \overset{!}{=} 0$ & $\phi \overset{!}{=} 0$

<u>Bem:</u> Wozu der ganze Aufwand, warum überhaupt $\vec{A}$ und ϕ?
Antwort: Man braucht die Potentiale, um relativistisch kovariante Theorien formulieren zu können (SRT, ART, QFT, QED, ...). Die Felder verhalten sich „schlecht" unter Lorentz-Transformationen!

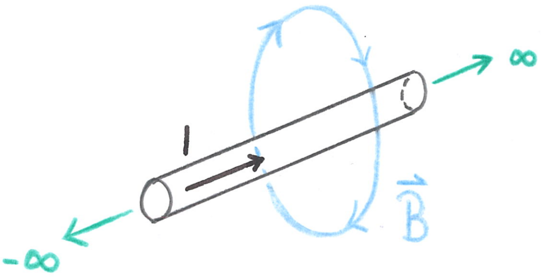
Das Magnetfeld eines geraden Drahtes

Magnetostatik: nur stationäre Ströme

→ Ein gerader Draht muss unendlich lang sein, um einen stationären Strom führen zu können; sonst träte Ladungserzeugung und -vernichtung auf.

Dürfen wir das Biot-Savart'sche Gesetz verwenden?

Nein! Das gilt nur für natürliche RB („inselförmige" Stromverteilung).



Wir setzen bei den Maxwell-Gln. an und nutzen die Zylindersymmetrie.

$$\text{rot}\,\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \quad , \quad \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(r)$$

Integration über eine Kreisscheibe C_r mit Radius r, die senkrecht zum Draht steht:

$$\int_{C_r} \text{rot}\,\vec{B}(r')\, d\vec{f}' \overset{\text{Satz von Stokes}}{=} \int_{\partial C_r} \vec{B}(r')\, d\vec{s}' = \mu_0 \int_{C_r} \vec{J}(\vec{r})\, d\vec{f} = \mu_0 I \quad , \quad \vec{J} \parallel d\vec{f}$$

$$\vec{B} \parallel d\vec{s} \quad \rightarrow \quad \int_{\partial C_r} B(r')\, ds(r') = \int_0^{2\pi} B(r)\, r\, d\varphi = 2\pi r\, B(r)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}}$$

Tatsächlich führt Anwendung des Biot-Savart'schen Gesetzes auf dieselbe Lösung...

Berechnung mittels Vektorpotential:

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \,, \quad \text{Symmetrie:} \quad \vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(r) \,, \quad \vec{j} = j\vec{e}_z$$

$$\rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_z}{dr}\right) = -\mu_0 j \qquad \text{innerhalb d. Drahtes}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_z}{dr}\right) = 0 \qquad \text{außerhalb d. Drahtes}$$

Da $\vec{B}(r) = \mathrm{rot}\,\vec{A}(r) = (\dots)\vec{e}_r + (\partial_z A_r - \partial_r A_z)\vec{e}_\varphi + (\dots)\vec{e}_z$ nur eine φ-Komponente haben wird, reicht es, A_z zu betrachten.

Lösung außerhalb: $\underline{A_z(r) - A_z(r_0) = a \ln\frac{r}{r_0}}$, $a = \text{const}$

Zur Bestimmung der Konstante a wertet man die Anschlussbedingung für einen ausgedehnten Draht (Radius R) aus:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_z}{dr}\right) = -r\mu_0 j \qquad \Big| \int_0^R dr$$

$$R\left.\frac{dA_z}{dr}\right|_R = -\frac{1}{2}R^2\mu_0 j \,.$$

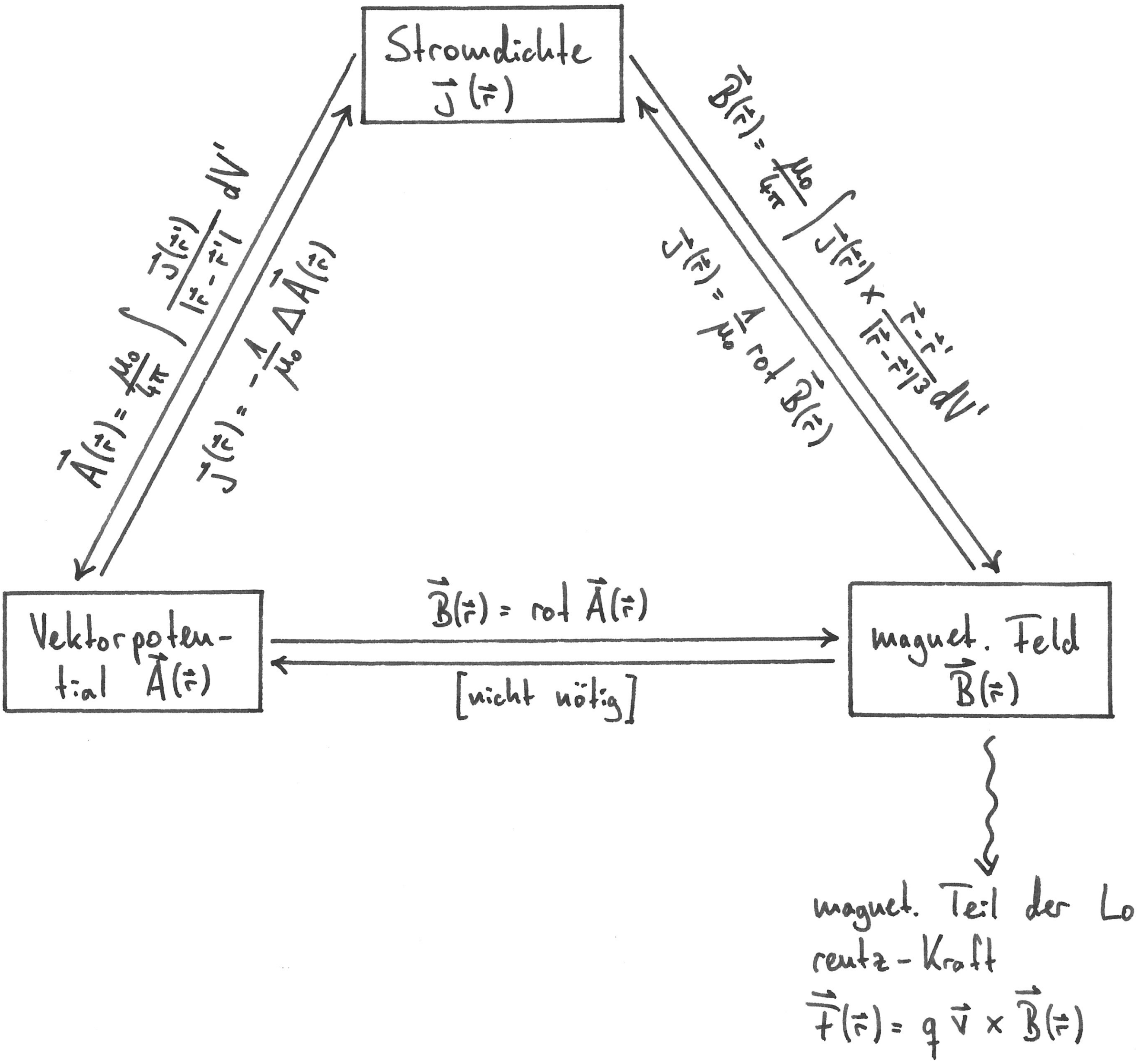
$$\Rightarrow \quad a = r\frac{dA_z}{dr} \overset{!}{=} R\left.\frac{dA_z}{dr}\right|_R = -\frac{1}{2}R^2\mu_0 j \underset{j=\frac{I}{\pi R^2}}{=} -\frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{A_z(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r}{r_0}}$$

Der Grenzübergang R->0 für einen dünnen Draht ist gar nicht mehr nötig.

$$\vec{B}(r) = -\partial_r A_z(r) = \underline{\underline{\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi}}$$

Überblick Magnetostatik



Der Maxwell'sche Spannungstensor

Man möchte Bewegungen und Verformungen beschreiben, welche auf der Wechselwirkung elektromagnetischer Felder mit Ladungen beruhen.

Einführung der Lorentz-Kraftdichte $\vec{f}(\vec{r})$, $[f] = \frac{N}{m^3}$:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\,\vec{E}(\vec{r}) + \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$$

Gesamtkraft auf ein Volumen V: $\vec{F} = \int_V \vec{f}(\vec{r}\,')\, dV'$

Mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen lassen sich die Ladungsdichten $\rho(\vec{r})$ und Stromdichten $\vec{j}(\vec{r})$ zugunsten der Felder eliminieren.

Definition des Maxwell'schen Spannungstensors:

$$T_{ij} := E_i D_j + H_i B_j - \delta_{ij} w \underset{\text{(Vakuum)}}{=} \varepsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \delta_{ij} w \qquad \Bigg|\ \hat{T} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R}),\ T_{ij} \equiv (\hat{T})_{ij},\ i,j = 1,2,3$$

Dabei ist w die Energiedichte:

$$w = \frac{1}{2}\left(E_j D_j + B_j H_j\right) \underset{\text{(Vakuum)}}{=} \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right).$$

Definition des Poynting-Vektors:

$$\vec{S}(\vec{r}) := \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r}) \underset{\text{(Vakuum)}}{=} \frac{1}{\mu_0}\vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$$

Mit diesen Definitionen lässt sich nun die Kraftdichte sehr kompakt schreiben:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \operatorname{div} \hat{T}(\vec{r}) - \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{S}(\vec{r}) \underset{\substack{| \\ \text{(Statik)}}}{=} \operatorname{div} \hat{T}(\vec{r})$$

bzw. $$f_i = \sum_j \partial_{x_j} T_{ij} - \frac{1}{c^2}\partial_t S_i$$

Für die Gesamtkraft gilt damit

$$\vec{F} = \int_V \vec{f}(\vec{r}\,')\, dV' = \int_V \operatorname{div} \hat{T}(\vec{r}\,')\, dV' = \int_{\partial V} \hat{T}(\vec{r}\,')\, d\vec{A}\,'.$$

Das heißt: Die Gesamtkraft auf einen (endlichen) dielektrischen Körper ist immer mit Hilfe von Oberflächenkräften auszudrücken.

Der Eintrag T_{ij} gibt die i-te Komponente der Kraft auf ein Flächenelement, welches in j-Richtung zeigt.

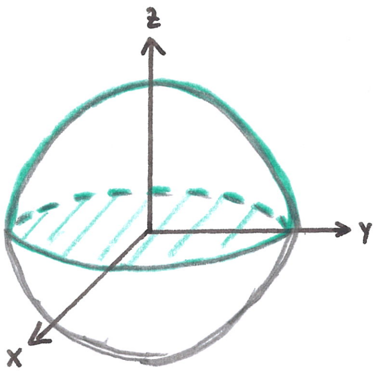
→ Diagonalelemente T_{xx}, T_{yy}, T_{zz} ↦ Drücke

→ nicht-Diagonalelemente $T_{xy}, T_{xz}, \dots$ ↦ Scherungen

<u>Bem:</u>

- $\hat{T}$ gibt eine Impulsstromdichte, während $\vec{S}$ die Bedeutung einer Energiestromdichte zukommt.
- Der Maxwell'sche Spannungstensor taucht in der relativistischen Physik wieder auf als Teil des elektromagnet. Feldstärketensors.
- Man muss em. Feldern einen Impuls zuordnen, damit das 3. Newton'sche Gesetz unverletzt bleibt und Impulserhaltung gelten kann.

Beispiel: Kraft auf eine Halbkugel



Radius: R
Gesamtladung: Q

Eine elektrisch geladene Vollkugel wird in 2 Hälften zerschnitten. Welche Kraft wirkt auf eine Hälfte?

elektrisches Feld: (außerhalb d. Kugel)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\begin{pmatrix}\sin\vartheta\cos\varphi\\ \sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\end{pmatrix}$$

Die Kugel sei starr (keine Verformung). Wegen Rotationssymmetrie brauchen wir nur den z-Anteil der Kraft:

$$T_{zx} = \varepsilon_0 E_z E_x = \varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 \cos\vartheta\sin\vartheta\cos\varphi$$

$$T_{zy} = \varepsilon_0 E_z E_y = \varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 \cos\vartheta\sin\vartheta\sin\varphi$$

$$T_{zz} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2\right) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 \left(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta\right)$$

- Kuppel: Flächenelement $d\vec{A} = R^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, \vec{e}_r$

$$(\hat{T}\, d\vec{A})_i = \sum_j T_{ij}\,(d\vec{A})_j$$

$$(\hat{T}\, d\vec{A})_z = T_{zx}\, dA_x + T_{zy}\, dA_y + T_{zz}\, dA_z$$
$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 R^2\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$\to \vec{F}_1 = \int_{\text{Kuppel}} (\hat{T}\, d\vec{A})_z\, \vec{e}_z \underset{r=R}{=} \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)^2 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta\, \vec{e}_z$$

$$= \underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{8R^2}\vec{e}_z}$$

- Boden: Flächenelement $d\vec{A} = -r\, dr\, d\varphi\, \vec{e}_z$

Feld im Inneren d. Kugel: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3} r \vec{e}_r$,

also am Boden $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$: $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow T_{zz}(r) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2\right) = -\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 r^2$$

$$\rightarrow \left(\hat{T}\, d\vec{A}\right)_z = T_{zz}\, dA_z = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 r^3\, dr\, d\varphi$$

$$\rightarrow \vec{F}_2 = \int_{\text{Boden}} \left(\hat{T}\, d\vec{A}\right)_z \vec{e}_z = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 2\pi \int_0^R r^3\, dr\, \vec{e}_z$$

$$= \underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{16R^2}\vec{e}_z}$$

$\Rightarrow$ Gesamtkraft auf die Halbkugel:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \underline{\underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q^2}{16R^2}\vec{e}_z}}$$

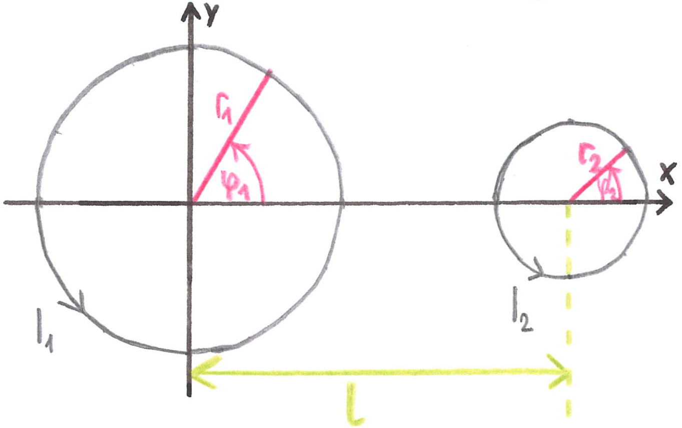
Beispiel zur Berechnung eines Induktionskoeffizienten

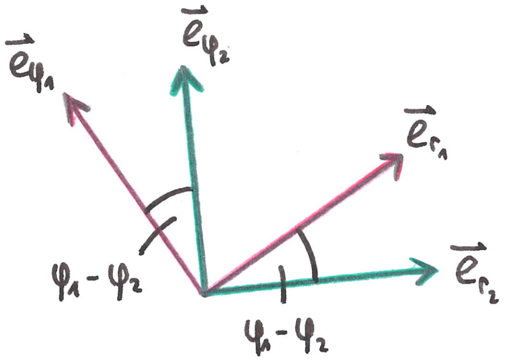
Der Induktionskoeffizient ist eine rein geometrische Größe zur Beschreibung einer Anordnung dünner, stromdurchflossener Leiter.

Allgemein: $$L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_i}\int_{C_j} \frac{d\vec{r}_i \, d\vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

Ind.koeffizient zweier Leiterschleifen i, j mit Geometrien C_i, C_j.

Betrachte zwei kreisförmige Leiterschleifen in der Ebene.





$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(1)}\int_{(2)} \frac{d\vec{r}_1 \, d\vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$d\vec{r}_1 = r_1 \, d\varphi_1 \, \vec{e}_{\varphi_1}$ | $d\vec{r}_2 = r_2 \, d\varphi_2 \, \vec{e}_{\varphi_2}$

$\vec{r}_1 = r_1 \, \vec{e}_{r_1}$ | $\vec{r}_2 = l \, \vec{e}_x + r_2 \, \vec{e}_{r_2}$

$$\Rightarrow d\vec{r}_1 \, d\vec{r}_2 = r_1 r_2 \, d\varphi_1 \, d\varphi_2 \, \vec{e}_{\varphi_1} \vec{e}_{\varphi_2} = r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \, d\varphi_1 \, d\varphi_2$$

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{(r_1 \vec{e}_{r_1} - r_2 \vec{e}_{r_2} - l \vec{e}_x)^2}$$

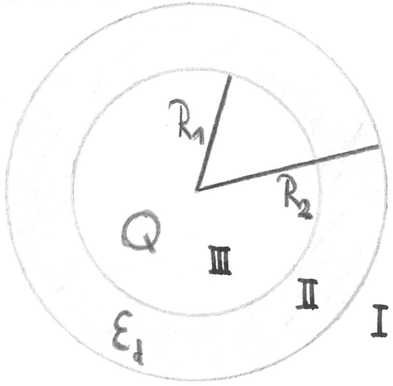
$\leftarrow \vec{e}_{r_1} \vec{e}_{r_2} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$, $\vec{e}_{r_1} \vec{e}_x = \cos\varphi_1$, $\vec{e}_{r_2} \vec{e}_x = \cos\varphi_2$

$$= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + l^2 - 2 r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - 2 l r_1 \cos\varphi_1 + 2 l r_2 \cos\varphi_2}$$

setze $\varphi_1 = 0$, u.s.w.

Elektrostatik in Dielektrika – Beispiele

A) geladene Metallkugel mit dielektrischer Hülle



Kugel: Radius R_1, Ladung Q
Hülle: Radius R_2, Permittivität ε_d

Man bestimme das Potential ϕ_0 $\phi(r=0)$.

$$\phi(r) = -\int_\infty^r E(r')\,dr'$$

im Zentrum: $$\phi_0 = -\int_\infty^0 E(r')\,dr' = -\int_\infty^{R_2} E_I(r)\,dr - \int_{R_2}^{R_1} E_{II}(r)\,dr - \int_{R_1}^{0} E_{III}(r)\,dr$$

- $E_{III} \equiv 0$, da Leiter
- $E_I = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$, da $\operatorname{div}[\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) + \vec{P}(\vec{r})] = \varrho(\vec{r})$, $\vec{P}(r>R_2) \equiv 0$, $\varrho = 0$
- in II:

$$D(r) = \varepsilon_0 \varepsilon_d E(r) \quad \text{(lineares Medium)}$$

$\rightarrow \operatorname{div}\left(\varepsilon_0\varepsilon_d E(r)\right) = \varrho(r)$ → wie zuvor, bloß „$\varepsilon_0 \to \varepsilon_0\varepsilon_d$"

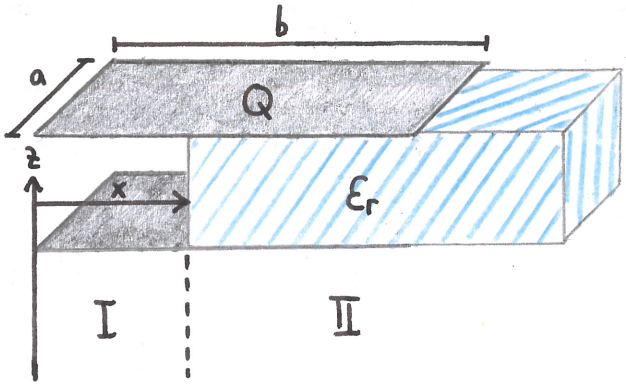
$$E_{II}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_d}\frac{Q}{r^2}$$

$$\Rightarrow \phi_0 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_\infty^{R_2}\frac{dr}{r^2} + \frac{1}{\varepsilon_d}\int_{R_2}^{R_1}\frac{dr}{r^2}\right) = \underline{\underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\varepsilon_d}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right]}}$$

Das war leicht...

B) Dielektrikum im Plattenkondensator

Ein lineares Dielektrikum (ε_d) befinde sich in einem Plattenkondensator (Fläche a·b, Ladung Q).



Annahme: $\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} E\,\vec{e}_z & \text{, innerhalb} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

und $\vec{D}(\vec{r}) = \begin{cases} \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}(\vec{r}) & \text{, im Dielektrikum} \\ \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}) & \text{, sonst} \end{cases}$

→ Maxwell'scher Spannungstensor: $T_{ij}(\vec{r}) = E_i(\vec{r})\, D_j(\vec{r}) - \frac{1}{2}\delta_{ij}\, E_k(\vec{r})\, D_k(\vec{r})$,

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_z D_z - \frac{1}{2} E_z D_z \end{pmatrix}$$

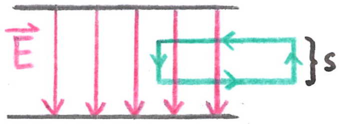
Kraftdichte: $f_i(\vec{r}) = \partial_{x_j} T_{ij}(\vec{r}) = 0 \quad \forall i$, da E_z, D_z Konstanten

Es wirkt keine Kraft. Das ist offensichtlich falsch (Experiment)!

Die Annahme eines scharf abgegrenzten $\vec{E}$-Feldes war nicht erlaubt; das Ampère'sche Gesetz verbietet sie sogar:

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

$$\int_A \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r})\, d\vec{A} = \oint_{\partial A} \vec{E}(\vec{r})\, d\vec{s} = 0.$$



$$\oint_{\partial A} \vec{E}(\vec{r})\, d\vec{s} = s \cdot E_z \neq 0 \quad ↯$$

⇒ Das komplizierte inhomogene Feld an den Rändern des Kondensators verursacht die Kraft auf das Dielektrikum.
Das werden wir nicht freiwillig ausrechnen!

Wir nutzen die elektrostatische Energie für raumladungsfreie Probleme (nur geladene Leiter):

$$W = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j C_{ij}\,\Phi_i \Phi_j = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j C^{-1}_{ij}\, Q_i Q_j .$$

Hier:

$$W = \frac{Q^2}{2C} \,, \qquad C = C_I + C_{II} = \frac{\varepsilon_0 a}{d}\left[x + \varepsilon_r (b-x)\right] \quad \text{für } x \in [0, b]$$

$$= \frac{\varepsilon_0 a}{d}(\varepsilon_r b - \chi x) \,, \quad \text{da } \varepsilon_r = 1 + \chi .$$

Änderung der Energie durch Arbeit: $dW = -F\,dx$

$$\rightarrow F(x) = -\frac{dW}{dx} = +\frac{Q}{2C^2}\frac{dC}{dx} \quad \text{(Minimierung der elektrostatischen Energie)}$$

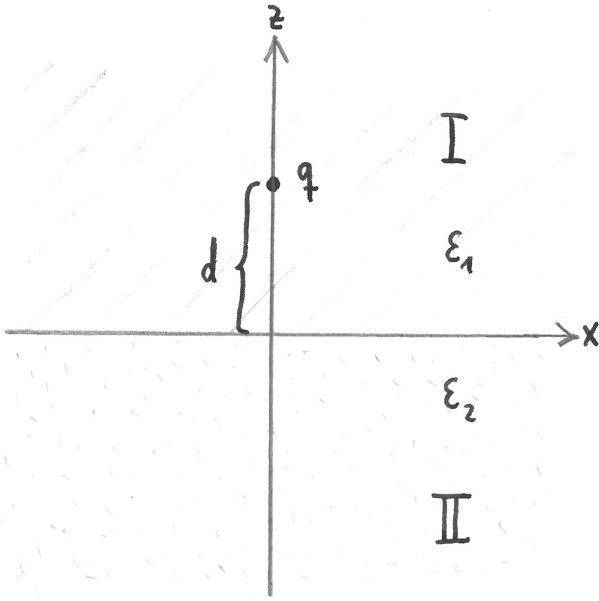
$$= \underline{\underline{-\frac{a\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\,Q^2}{2d\; C^2(x)}}} = \frac{dQ^2}{2a\,\varepsilon_0}\,\frac{\varepsilon_r - 1}{[x(1-\varepsilon_r) + b\varepsilon_r]^2}$$

C Ladung zwischen zwei Medien

Dielektrika: ε_1 für $z>0$, ε_2 für $z<0$

Punktladung bei: $\vec{r}_q = (x_q, y_q, d)$

Setze o.B.d.A. $x_q = 0 = y_q$.



Poisson-Gleichungen:

$$\text{I}: \quad -\varepsilon_0 \varepsilon_1 \Delta \phi_{\text{I}}(\vec{r}) = \rho_{ext}(\vec{r})$$

$$\text{II}: \quad -\varepsilon_0 \varepsilon_2 \Delta \phi_{\text{II}}(\vec{r}) = 0$$

Das Potential muss an der Grenzfläche stetig übergehen (sonst $|\vec{E}| \to \infty$) und die Normalkomponente des Feldes:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \phi_{\text{I}}}{\partial n} \overset{!}{=} \varepsilon_2 \frac{\partial \phi_{\text{II}}}{\partial n}.$$

Die Lösung für beliebige Ladungsverteilungen ist durch eine Green'sche Funktion gegeben (je Gebiet):

$$\phi_{\text{I}}(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} dV' \, \rho_{ext}(\vec{r}\,') \, G_{\text{I}}(\vec{r}, \vec{r}\,') \quad , \qquad \phi_{\text{II}}(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3} dV' \, \rho_{ext}(\vec{r}\,') \, G_{\text{II}}(\vec{r}, \vec{r}\,')$$

mit $\quad -\varepsilon_0 \varepsilon_1 \Delta G_{\text{I}}(\vec{r}, \vec{r}\,') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$, $\quad -\varepsilon_0 \varepsilon_2 \Delta G_{\text{II}}(\vec{r}, \vec{r}\,') = 0$.

Ansatz:

$$G_{\text{I}}(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + \frac{A}{|\vec{r} - \vec{r}_s\,'|} \right) , \qquad \vec{r}_s\,' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ -z' \end{pmatrix}$$

$$G_{\text{II}}(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2} \frac{B}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} ,$$ dielekt. Spiegelladung bei $\vec{r}_s$

- stetiger Übergang: $G_{\text{I}}(z=0, \vec{r}\,') \overset{!}{=} G_{\text{II}}(z=0, \vec{r}\,')$

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2}} + \frac{A}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2}} \right] = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{B}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2}}$$

$$\Rightarrow \underline{\varepsilon_2 (1 + A) = \varepsilon_1 B} \qquad (*)$$

- Normalkomponente : $\varepsilon_1 \frac{\partial G_I}{\partial z}\Big|_{z=0} \overset{!}{=} \varepsilon_2 \frac{\partial G_{II}}{\partial z}\Big|_{z=0}$

$$\left(-\frac{z'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \frac{Az'}{|\vec{r}-\vec{r}_s'|^3}\right)_{z=0} = -\frac{Bz'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\Big|_{z=0}$$

$$\Rightarrow \underline{1-A=B} \qquad (**)$$

(*) & (**) : $$\underline{A=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \quad , \quad B=\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}$$

→ Damit sind die Green'schen Funktionen bekannt und das Problem ist gelöst für eine beliebige Ladungsverteilung, die sich in I befindet.

Punktladung: $\rho_{ext}(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_q)$

$$\Rightarrow \Phi_I(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_q|} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_s|}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right]}} \quad , \quad \vec{r}\in I$$

$$\Phi_{II}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_q|}\right)$$

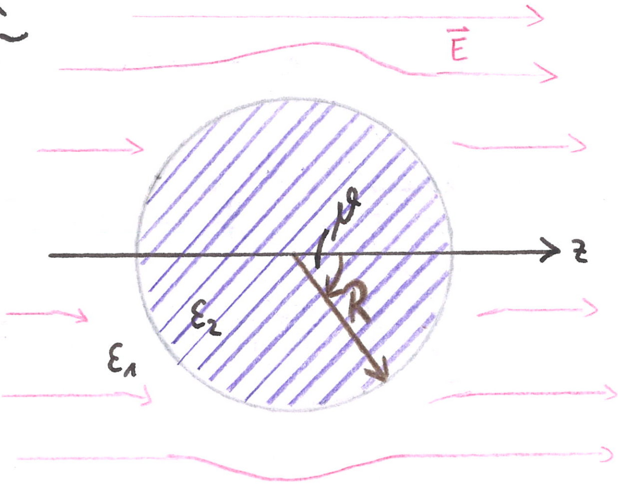
$$= \underline{\underline{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}}} \quad , \quad \vec{r}\in II$$

Für eine Ladung, die genau auf der Grenzfläche sitzt, lässt sich ein Grenzübergang $d \to 0$ durchführen:

$$\Phi_I(\vec{r}) \longrightarrow \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{1}{|\vec{r}|}\left(1+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}}$$

$$\Phi_{II}(\vec{r}) \longrightarrow \underline{\underline{\frac{2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}}$$

D) Dielektrische Kugel im Dielektrikum



Eine dielektrische Kugel (Radius R, Permittivität ε_2) befinde sich in einem Dielektrikum (ε_1) unter Einfluss eines im Unendlichen homogenen elektr. Feldes, $\vec{E}(|\vec{r}| \to \infty) = E_z \vec{e}_z$.

Man bestimme Potential und Feld im gesamten Raum.

Wir wählen Kugelkoordinaten um die z-Achse, sodass azimutale Symmetrie vorliegt (keine φ-Abhängigkeit) und wir das bereits bekannte Ergebnis für die Laplace-Gleichung nutzen können:

$$\Phi(r,\vartheta) = \sum_{l=\infty}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos\vartheta) \quad \text{mit Legendre-Polynomen } P_l .$$

$\to$ innere und äußere Lösung $\Phi^{(i)}(r,\vartheta)$, $\Phi^{(a)}(r,\vartheta)$ mit 4 Familien von Konstanten $A_l^{(i)}, B_l^{(i)}, A_l^{(a)}, B_l^{(a)}$

- 1. Forderung: $\Phi^{(i)}(r=0) \overset{!}{<} \infty$

$$\Rightarrow \underline{B_l^{(i)} = 0} \quad \forall l$$

- 2. Forderung: $\vec{E}(r \to \infty) \overset{!}{=} E_z \vec{e}_z$

$$\vec{E}(r>R) = -\operatorname{grad} \Phi^{(a)}(r,\vartheta) = -\partial_r \Phi^{(a)}(r,\vartheta)\vec{e}_r - \frac{1}{r}\partial_\vartheta \Phi^{(a)}(r,\vartheta)\vec{e}_\vartheta$$

$$= -\sum_{l=0}^{\infty} \left[l A_l^{(a)} r^{l-1} - (l+1) B_l^{(a)} r^{-(l+2)} \right] P_l(\cos\vartheta)\vec{e}_r$$

$$-\sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l^{(a)} r^{l-1} + B_l^{(a)} r^{-(l+2)} \right] \partial_\vartheta P_l(\cos\vartheta)\vec{e}_\vartheta$$

$r \to \infty$: alle $B^{(a)}$-Terme verschwinden,

damit $\Phi^{(a)}(r\to\infty) < \infty$ muss $\underline{A_l^{(a)} = 0 \text{ für } l \geq 2}$

$$\to \vec{E}(r\to\infty) = \lim_{r\to\infty} \vec{E}(r,\vartheta) = -A_1^{(a)} P_1(\cos\vartheta)\vec{e}_r - A_1^{(a)} \partial_\vartheta P_1(\cos\vartheta)\vec{e}_\vartheta$$

Mit $P_1(x) = x$:

$$A_1^{(a)}\left(\sin\vartheta\,\vec{e}_\vartheta - \cos\vartheta\,\vec{e}_r\right) = -A_1^{(a)}\,\vec{e}_z \overset{!}{=} E_z\,\vec{e}_z \Rightarrow \underline{A_1^{(a)} = -E_z}$$

- 3. Forderung: $\phi^{(i)}(R,\vartheta) \overset{!}{=} \phi^{(a)}(R,\vartheta)$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l^{(i)} R^l P_l(\cos\vartheta) = A_0^{(a)} P_0(\cos\vartheta) - E_z R\cos\vartheta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l^{(a)} R^{-(l+1)} P_l(\cos\vartheta)$$

Mit $P_0(x) = 1$:

$$\text{LHS} = \underbrace{A_0^{(i)}}_{l=0} + \underbrace{A_1^{(i)} R\cos\vartheta}_{l=1} + \sum_{l=2}^{\infty} A_l^{(i)} R^l P_l(\cos\vartheta)$$

$$\text{RHS} = \overbrace{A_0^{(a)} + \frac{1}{R}B_0^{(a)}}\ \overbrace{- E_z R\cos\vartheta + \frac{1}{R^2}B_1^{(a)}\cos\vartheta} + \sum_{l=2}^{\infty} B_l^{(a)} R^{-(l+1)} P_l(\cos\vartheta)$$

Die Orthogonalität[1] der $P_l(x)$, also $\langle P_n(x), P_m(x)\rangle \sim \delta_{nm}$, ermöglicht einen Koeffizientenvergleich:

$$l=0: \quad A_0^{(i)} = A_0^{(a)} + \frac{1}{R}B_0^{(a)}$$

$$l=1: \quad A_1^{(i)} R = -E_z R + \frac{1}{R^2}B_1^{(a)}$$

$$l\geq 2: \quad A_l^{(i)} R^l = B_l^{(a)} R^{-(l+1)}$$

- 4. Forderung: $\varepsilon_1 \partial_r \phi^{(a)}\big|_R \overset{!}{=} \varepsilon_2 \partial_r \phi^{(i)}\big|_R$

$$\partial_r \phi^{(a)}(r,\vartheta) = -E_z P_1(\cos\vartheta) - \sum_{l=0}^{\infty}(l+1) B_l^{(a)} r^{-(l+2)} P_l(\cos\vartheta)$$

$$\partial_r \phi^{(i)}(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} l\, A_l^{(i)} r^{l-1} P_l(\cos\vartheta)$$

$$l=0: \quad -\varepsilon_1 B_0^{(a)}\frac{1}{R^2} = 0 \rightarrow \underline{B_0^{(a)} = 0}$$

$$l=1: \quad -\varepsilon_1 E_z - \frac{2\varepsilon_1}{R^3}B_1^{(a)} = \varepsilon_2 A_1^{(i)}$$

$$l\geq 2: \quad -\varepsilon_1(l+1) B_l^{(a)} R^{-(l+2)} = \varepsilon_2\, l\, A_l^{(i)} R^{l-1}$$

---

[1] bzgl. Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx$ auf dem Hilbertraum

Zusammen:

$$l=0: \quad B_0^{(i)} = 0 = B_0^{(a)} \quad , \quad A_0^{(i)} = A_0^{(a)} \equiv A$$

$$l=1: \quad B_1^{(a)} = R^3 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_z \quad , \quad A_1^{(i)} = -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_z$$

$$l \geq 2: \quad A_l^{(i)} = 0 = B_l^{(a)} \quad \forall l \geq 2$$

$$\rightarrow \phi^{(i)}(r,\vartheta) = A - \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_z \cos\vartheta \, r \quad , \quad r \leq R$$

$$\phi^{(a)}(r,\vartheta) = A - \left(E_z r + R^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{E_z}{r^2} \right) \cos\vartheta \, , \quad r \geq R$$

o.B.d.A. : $A \overset{!}{=} 0$

$$\phi(r,\vartheta) = \begin{cases} -\frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_z \cos\vartheta \, r \, , & r \leq R \\ -E_z \left(r + R^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{1}{r^2} \right) \cos\vartheta \, , & r \geq R \end{cases} \qquad \Bigg\|$$

<u>Bem:</u> Wegen des bis ins Unendliche reichenden $\vec{E}$-Feldes sind keine natürlichen Randbedingungen möglich.

Für das elektrische Feld erhält man

$$\vec{E}(r,\vartheta) = -\text{grad}\, \phi(r,\vartheta) = \begin{cases} \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_z \vec{e}_z \, , & r \leq R \\ E_z \vec{e}_z + E_z R^3 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{1}{r^3} \left(2\cos\vartheta \, \vec{e}_r + \sin\vartheta \, \vec{e}_\vartheta \right), & r \geq R \end{cases}$$

D.h. falls $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, ist $E^{(i)} > E_z$! Durch Anlegen eines äußeren Feldes erzeugt man ein stärkeres Feld im Inneren. Diesen Effekt bezeichnet man als „Feldüberhöhung" im dielektrischen Hohlraum.

Elektromagnetische Wellen

Maxwell-Gleichungen im Vakuum:

$$\varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{r},t)=0 \qquad\qquad \mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r},t)=0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},t)+\partial_t\vec{B}(\vec{r},t)=0 \qquad\qquad c^2\,\mathrm{rot}\,\vec{B}(\vec{r},t)=\partial_t\vec{E}(\vec{r},t)$$

a) $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},t) = -\mathrm{rot}\,\partial_t\vec{B}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{E}(\vec{r},t)$

$$\shortparallel$$

$$\mathrm{grad}\,\cancelto{0}{\mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{r},t)} - \Delta\vec{E}(\vec{r},t)$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \Box\vec{E}(\vec{r},t)\equiv\Delta\vec{E}(\vec{r},t)-\frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{E}(\vec{r},t)=0\\ \text{analog: } &\Box\vec{B}(\vec{r},t)\equiv\Delta\vec{B}(\vec{r},t)-\frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{B}(\vec{r},t)=0\end{aligned}\right\}$$

Wellengleichungen für die em. Felder

b) Lorenz-Eichung: $\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r},t)+\frac{1}{c^2}\partial_t\phi(\vec{r},t)\overset{!}{=}0$

Mit $\vec{B}(\vec{r},t)=\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r},t)$, $\vec{E}(\vec{r},t)=-\mathrm{grad}\,\phi(\vec{r},t)-\partial_t\vec{A}(\vec{r},t)$ folgt:

$$\mathrm{rot}\,\vec{B}(\vec{r},t)=\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r},t)=\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r},t)-\Delta\vec{A}(\vec{r},t)$$

$$\shortparallel$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{1}{c^2}\mathrm{grad}\,\partial_t\phi(\vec{r},t)-\frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A}(\vec{r},t)$$

$$\Rightarrow\Delta\vec{A}(\vec{r},t)-\frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A}(\vec{r},t)=\mathrm{grad}\left[\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r},t)+\frac{1}{c^2}\partial_t\phi(\vec{r},t)\right]=0.$$

Außerdem: $\mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{r},t)=-\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi(\vec{r},t)-\partial_t\,\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r},t)$

$$=-\Delta\phi(\vec{r},t)+\frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi(\vec{r},t)=0.$$

$$\Rightarrow\quad \begin{aligned}&\Box\vec{A}(\vec{r},t)=0\\ &\Box\phi(\vec{r},t)=0\end{aligned}\quad\Bigg|$$

Wellengleichungen für die Potentiale

c) Coulomb-Eichung: $\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r},t)\overset{!}{=}0$

$$\mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{r},t)=-\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi(\vec{r},t)-\partial_t\,\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r},t)=0$$

$\Rightarrow \underline{\Delta\phi(\vec{r},t)=0}$ Laplace-Gleichung für ϕ

Außerdem lässt sich erreichen, dass $\vec{E}(\vec{r},t) = -\partial_t \vec{A}(\vec{r},t)$.

$\Rightarrow$ $\underline{\Box \vec{A}(\vec{r},t) = 0}$ Wellengleichung

Ebene Wellen lösen die Wellengl., sie sind die Normalmoden des Systems, aus denen sich jede andere Lösung zusammensetzen lässt.

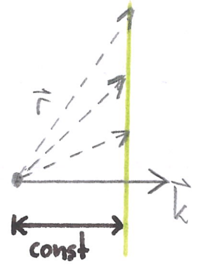
Elementarlösung: $\underline{\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0 \, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}}$

<u>Bem:</u> Hier wurde $\vec{A}$ in die komplexen Zahlen fortgesetzt. Von physikalischer Bedeutung ist nur der Realteil.

Die Flächen konstanter Phase sind Ebenen (daher der Name):

$\vec{k}\vec{r} = \text{const.}$

(für festes t)



Coulomb-Eichung: $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r},t) = i\vec{k}\vec{A}_0 \, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = 0$

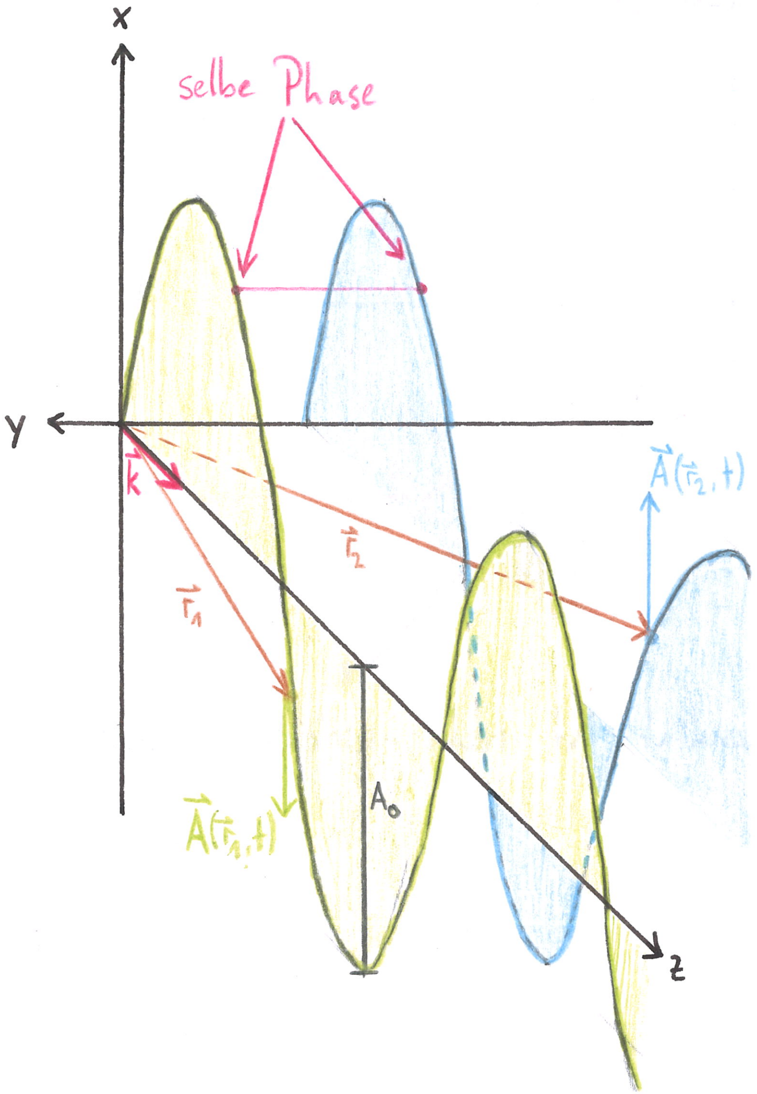
$\Rightarrow$ $\vec{k} \cdot \vec{A}_0 = 0$, $k \perp \vec{A}_0$ -> sog. „transversale Eichung"

Einsetzen in die Wellengleichung:

$$\Delta \vec{A}(\vec{r},t) = -\vec{k}^2 \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A}(\vec{r},t) = -\omega^2 \vec{A}(\vec{r},t) / c^2$$

$\Rightarrow$ $\underline{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$ Dispersionsrelation $k(\omega)$ im Vakuum

Skizze: $\vec{k} = k\vec{e}_z \ , \ \vec{A}_0 = A_0 \vec{e}_x$



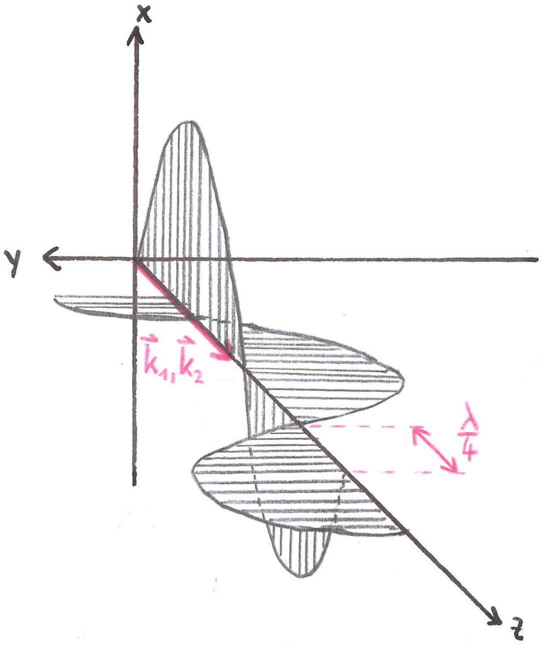
Polarisation:

Man betrachte das Feld an einem festen Punkt, z.B. $\vec{A}(\vec{r}_1,t)$. Lässt man die Zeit laufen, so ändert sich der Betrag von $\vec{A}$ periodisch mit der Zeit zwischen 0 und A_0, die Richtung bleibt jedoch immer $\vec{e}_x$. Das nennt man „lineare Polarisation".

Zirkular polarisierte ebene Wellen erhält man bspw. durch Überlagerung zweier linear polarisierter Wellen. Dann rotiert der Vektor des Gesamtfeldes auf einem Kreis (links- oder rechtsumlaufend).

Ebenso gibt es elliptisch polarisierte Wellen.

Überlagerung zweier linear pol. Wellen:



Das Resultat ist rechts-zirkular polarisiert.

Betrachtungen zur Wellengleichung

Wellengleichung in 1 Dimension:

$$\Box \phi(x,t) = \partial_x^2 \phi(x,t) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi(x,t) = 0$$

$$+ \text{Anfangsbedingungen} \quad \phi(x,t=0) = \phi_0 , \quad \partial_t \phi(x,t)\Big|_{t=0} = \phi_0'$$

Bem:

- Durch eine Koordinatentransformation der Form $X = x+t$, $T = x-t$ lässt sich die Wellengleichung auch als $\partial_X \partial_T \phi(X,T) = 0$ schreiben.
- Jede beliebige Funktion der Form $f(kx \pm \omega t)$ mit $k^2 = \omega^2/c^2$ löst die Wellengleichung.

Fourier-Transformation, also

$$\text{Ortsraum} \to \text{Ortsfrequenzraum}$$
$$\phi(x,t) \to \tilde{\phi}(k,t)$$
$$\partial_x^2 \to (ik)^2 ,$$

führt auf

$$\partial_t^2 \tilde{\phi}(k,t) = -k^2 c^2 \tilde{\phi}(k,t)$$

und die Elementarlösung lässt sich sofort aufschreiben:

$$\underline{\tilde{\phi}(k,t) = A(k)\, e^{i\omega(k)t} + B(k)\, e^{-i\omega(k)t}} \quad \text{mit} \quad \omega(k) := ck .$$

Rücktransformation:

$$\phi(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\phi}(k,t)\, e^{ikx}\, dk = \underline{\int_{-\infty}^{\infty} \left[A(k)\, e^{i(\omega t + kx)} + B(k)\, e^{-i(\omega t - kx)} \right] dk}$$

D.h., die allgemeine Lösung ist eine lineare Superposition ebener Wellen (mit Wellenzahlen k) mit Fourier-Koeffizienten $A(k)$ und $B(k)$.

Wegen $k = k(\omega)$ kann man auch über ω integrieren.

Für $t=0$ gilt

$$\phi(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(A(k) + B(k)\right) e^{ikx} \, dk \qquad \text{und}$$

$$\partial_t \phi \Big|_{t=0} = i \int_{-\infty}^{\infty} \omega(k) \left(A(k) - B(k)\right) e^{ikx} \, dk$$

und man bestimmt die Koeffizienten per Rücktransformation aus den Anfangsbedingungen:

$$A(k) + B(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(x) \, e^{-ikx} \, dx \, ,$$

$$A(k) - B(k) = \frac{1}{i\omega(k)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0'(x) \, e^{-ikx} \, dx \, .$$

Wellenfronten $\phi(x,t) \overset{!}{=} \text{const}$ breiten sich offenbar mit Geschwindigkeit c aus:

$$kx \pm \omega t = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \pm \frac{x}{t} \, ,$$

„±" für ein- und auslaufende Wellen.

Ebene Wellen im Fourier-Raum

Wir betrachten (formal) die Fourier-Transformation der Delta-Distribution:

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega = 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[1] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{i\omega t}\, dt = \delta(\omega)$$

Die δ-Distribution lässt sich als Überlagerung ebener Wellen darstellen. Eine ebene Welle (fester Frequenz) entspricht einem Punkt im Fourier-Raum.

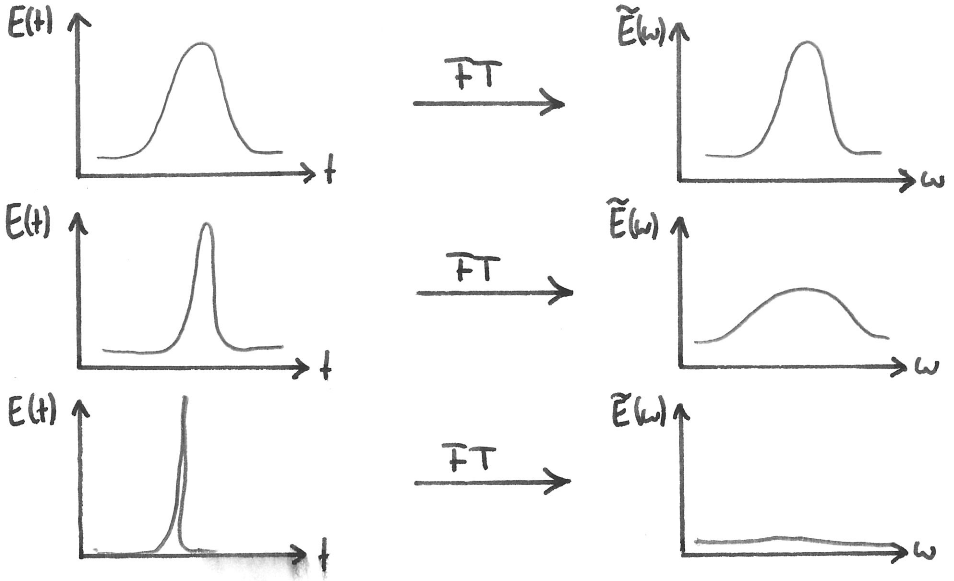
Ebene Wellen bilden eine „Basis", aus der sich beliebige Lösungen der Wellengl. zusammensetzen lassen.

Bsp.: Frequenzspektrum eines Gauß-Pulses

$$E(t) = E_0\, e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}$$

$$\tilde{E}(\omega) = \mathcal{F}[E(t)] = \frac{E_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{\tau^2} + i\omega t}\, dt = \frac{\tau E_0}{\sqrt{4\pi}}\, e^{-\omega^2 \frac{\tau^2}{4}}$$

Man erhält wieder eine Gaußverteilung. Sie hat Breite $\frac{4}{\tau^2}$.



Elektromagnetische Wellen im Dielektrikum (unmagnetisch, $\mu=1$)

Die Permittivität $\varepsilon = 1 + \chi$ ist im Allgemeinen:

- ortsabhängig: $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$, inhomogene Medien
- frequenzabhängig: $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r}, \omega)$, d.h. frequenzabhängige Absorption / Dispersion

  Dispersionsrelation: $k^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega)$

  Bsp.: Durchlässigkeit von Pappe (Licht / Funk)

- richtungsabhängig: $\hat{\varepsilon}(\vec{r}, \omega) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$, anisotrope Medien

  Tensor, führt auf Kristalloptik (Brechungsindex-Ellipsoid)

- komplex: $\varepsilon(\vec{r}, \omega) = \mathrm{Re}\, \varepsilon(\vec{r}, \omega) + i \,\mathrm{Im}\, \varepsilon(\vec{r}, \omega)$

  $\left.\begin{array}{l} \mathrm{Re}\, \varepsilon \text{ beschreibt Dispersion.} \\ \mathrm{Im}\, \varepsilon \text{ beschreibt Absorption.} \end{array}\right\}$ Verknüpfung durch „Kramers-Kronig-Relation"

Wechselwirkungen im Dielektrikum:

- Valenzelektronen
- freie Elektronen (Plasmonen)
- Gitterschwingungen (Phononen)

Der Zusammenhang $\vec{P}[\vec{E}]$ ist durch Faltung mit der sog. „Response-Funktion" gegeben:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \hat{R}(\vec{r}, t) * \vec{E}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \int_0^\infty \hat{R}(\vec{r}, \tau) \vec{E}(\vec{r}, t-\tau) d\tau.$$

Die Integration beginnt bei 0, nicht $-\infty$, um avancierte Felder auszuschließen (Abhängigk. von zukünftigen Zeiten).

Der Faltung entspricht im Fourier-Raum eine Multiplikation:

$$\vec{\vec{P}}(\vec{r},\omega) = \varepsilon_0 \hat{\chi}(\vec{r},\omega)\vec{\vec{E}}(\vec{r},\omega).$$

Wir beschränken uns auf ein homogenes $(\hat{\varepsilon}(\cancel{\vec{r}},\omega))$, isotropes $(\varepsilon_{ij} \equiv \varepsilon)$, transparentes $(\operatorname{Im}\varepsilon(\omega) \equiv 0)$ Medium.

$$\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t) + \mu_0 \partial_t \vec{H}(\vec{r},t) = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r},t) = \cancel{\mu_0}\,\partial_t \vec{D}(\vec{r},t) \qquad \text{(keine makrosk. Ströme)}$$

$$\rightarrow \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t) = -\mu_0 \partial_t \operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r},t) = -\mu_0 \partial_t^2 \vec{D}(\vec{r},t)$$

Fourier-Raum: $\vec{\vec{D}}(\vec{r},\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon(\omega)\vec{\vec{E}}(\vec{r},\omega)$, $\quad \partial_t \to -i\omega$

$$\rightarrow \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\vec{E}}(\vec{r},\omega) = \mu_0 \omega^2 \vec{\vec{D}}(\vec{r},\omega) = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\vec{\vec{E}}(\vec{r},\omega)$$

Mit $\operatorname{div}\vec{\vec{D}}(\vec{r},\omega) = \varepsilon_0 \operatorname{div}\left(\varepsilon(\omega)\vec{\vec{E}}(\vec{r},\omega)\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec{\vec{E}}(\vec{r},\omega) = 0$,

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\vec{E}}(\vec{r},\omega) = \operatorname{grad}\underbrace{\cancel{\operatorname{div}\vec{\vec{E}}(\vec{r},\omega)}}_{0} - \Delta\vec{\vec{E}}(\vec{r},\omega)$$

folgt:

$$\underline{\Delta\vec{\vec{E}}(\vec{r},\omega) + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\vec{\vec{E}}(\vec{r},\omega) = 0.} \qquad \text{Helmholtz-Gleichung}$$

Für ebene Wellen $\vec{\vec{E}}(\vec{r},\omega) = \vec{e}(\vec{k},\omega)\, e^{i\vec{k}\vec{r}}$ folgt sofort

- Transversalität: $\operatorname{div}\vec{\vec{E}}(\vec{r},\omega) = i\vec{k}\,\vec{e}(\vec{k},\omega)e^{i\vec{k}\vec{r}} \Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{e} = 0$,
- Dispersionsrelation: $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)$.

Übergang zum Zeitraum:

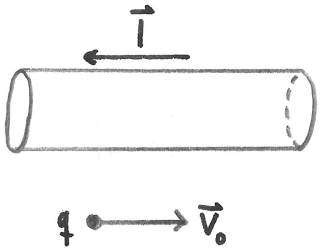
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{e}(\vec{k},\omega)\, e^{i(\vec{k}(\omega)\vec{r} - \omega t)}\, d\omega + \text{c.c.}$$

Die Relativität elektrischer und magnetischer Felder

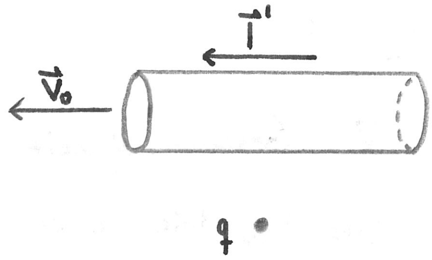
$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Bezüglich welchem Inertialsystems wird die Geschwindigkeit $\vec{v}$ gemessen? Jedes muss geeignet sein!

Wir betrachten einen stromdurchflossenen Draht und eine parallel dazu bewegte Ladung q, $q<0$.



im Ruhesystem S
des Drahtes



im Ruhesystem S'
der Ladung q

beachte: $\vec{I}$ (bzw. $\vec{I}'$) zeigt entgegen der Elektronenbewegung im Draht.

in S: magnetische Kraft auf q, zum Draht hin gerichtet
in S': keine magnetische Kraft möglich, da q in Ruhe

Was nun ?!

Betrachtung in S:

Notation: $\vec{v}$ - Geschwindigkeit der Elektronen im Draht
$\rho_{(-)}$ - Ladungsdichte der Elektronen
$\rho_{(+)}$ - Ladungsdichte der Ionen im Draht

Der Draht ist elektrisch neutral, $\rho_{(+)} + \rho_{(-)} = 0$.

$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, r - Abstand zum Draht (mittelpunkt)

$$\Rightarrow \quad F = q v_0 B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} q v_0 \underset{\overset{\uparrow}{I = \rho_{(-)} A \vec{v}}}{=} \frac{\mu_0 A}{2\pi r} q \rho_{(-)} v v_0$$

Für den speziellen Fall $v = v_0$:

$$\underline{F = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0} \frac{\rho_{(-)} A}{r} \frac{v^2}{c^2}}$$

Betrachtung in S':

Notation: $\vec{v}'$ - Geschwindigkeit der Elektronen im Draht

$\rho_{(+)}, \rho_{(-)}$ wie zuvor

$v' = 0$ für den speziellen Fall

In einem Drahtstück der Länge L_0 befindet sich die Ladung $Q = \rho L_0 A = (\rho_{(+)} + \rho_{(-)}) L_0 A = 0$.

Aber: Für den bewegten Draht gilt der Zusammenhang für die speziell-relativistische Längenkontraktion, $L_0' = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Die Ladung ist eine Erhaltungsgröße und invariant unter Lorentz-Transformationen („Lorentz-Skalar"), $Q = Q'$. Daher muss die Ladungsdichte transformiert werden:

$$Q = Q'$$

$$\rho L_0 A = \rho' L_0' A \quad \Rightarrow \quad \underline{\rho' = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \quad .$$

Wir brauchen mehr Notation:

$\varrho_{(+),0}$ - Ruheladungsdichte

$\varrho_{(+)}$ - Ladungsdichte in S

$\varrho'_{(+)}$ - Ladungsdichte in S',

ebenso für $\varrho_{(-),0}$, $\varrho_{(-)}$, $\varrho'_{(-)}$.

Auf jeden Fall ist der Draht in S ungeladen, $0 = \varrho_{(+)} + \varrho_{(-)}$.

In S ruhen positive Ladungen, die negativen sind mit v bewegt:

$$\varrho_{(+)} = \varrho_{(+),0} \,, \qquad \varrho_{(-)} = \frac{\varrho_{(-),0}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \;;$$

in S' ruhen negative Ladungen, die positiven sind mit v bewegt:

$$\varrho'_{(-)} = \varrho_{(-),0} \,, \qquad \varrho'_{(+)} = \frac{\varrho_{(+),0}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,.$$

- $0 = \varrho_{(+)} + \varrho_{(-)} = \varrho_{(+),0} + \dfrac{\varrho_{(-),0}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad \rightarrow \quad \varrho_{(+),0} = -\dfrac{\varrho_{(-),0}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
- $\varrho'_{(+)} + \varrho'_{(-)} = \dfrac{\varrho_{(+),0}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \varrho_{(-),0} = \varrho_{(-),0}\left(1 - \dfrac{1}{1-v^2/c^2}\right)$ → Draht geladen!

$$\Rightarrow F' = qE \underset{\substack{| \\ \text{Feld eines geladenen Zylinders}}}{=} -q\frac{\varrho' A}{2\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\left(\varrho'_{(+)} + \varrho'_{(-)}\right)\frac{A}{r} = \underline{\frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\varrho_{(-),0} A}{r}\,\frac{v^2}{c^2}\,\frac{1}{1-v^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \underline{F = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\varrho_{(-),0} A}{r}\,\frac{v^2}{c^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}}$$

Es gilt also $F' = \dfrac{F}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Die Kraft transformiert sich korrekt beim Übergang zwischen den Inertialsystemen.

Die Physik ist konsistent, E- und B-Feld sind untrennbar verbunden!

Wegen $v \ll c$ ist B viel schwächer als E.

Dipolstrahlung

Mit „Strahlung" bezeichnet man die Erzeugung und Emission elektromagnetischer Wellen.

Der Energiefluss wird vom Poynting-Vektor $\vec{S}(\vec{r},t)$ beschrieben (Energie/Zeit·Fläche) und die von einer (inselförmigen) Quelle abgestrahlte Leistung vom Oberflächenintegral

$$P(r,t) = \oint_{S_r} \vec{S}(\vec{r}\,',t)\, d\vec{f}\,' = \frac{1}{\mu_0} \oint_{S_r} \vec{E}(\vec{r}\,',t) \times \vec{B}(\vec{r}\,',t)\, d\vec{f}\,'.$$

Zusätzlich : zeitliche Mittelung $P(r,t) \to \langle P \rangle(r)$,

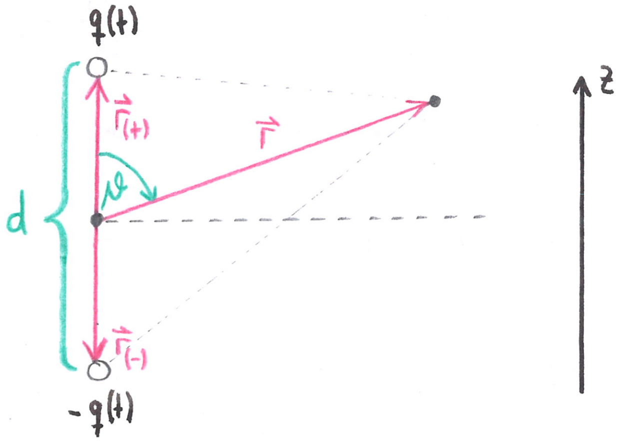
Abstrahlung ins Unendliche $\lim\limits_{r\to\infty} \langle P \rangle (r)$

Statische Felder strahlen nicht, denn:

$\vec{E}(r) \sim 1/r^2$, $\vec{B}(r) \sim 1/r^2$ $\Rightarrow$ $\vec{S}(r) \sim 1/r^4$

Kugelfläche $df \sim r^2$ $\Rightarrow$ $P(r) \sim 1/r^2 \xrightarrow{r\to\infty} 0$.

Gegeben seien zwei durch einen Draht verbundene Metallkugeln, deren Ladung sich periodisch mit $q(t) = q_0 \cos(\omega t)$ ändere.



Dipolmoment (ohne Draht):

$$\vec{p}(t) := \int \vec{r}\, \rho(\vec{r})\, dV$$

$$= \int \vec{r} \left[\delta(\vec{r} - \vec{r}_{(+)}) - \delta(\vec{r} - \vec{r}_{(-)}) \right] q(t)\, dV$$

$$= (\vec{r}_{(+)} - \vec{r}_{(-)})\, q(t) = d\, q_0 \cos(\omega t)\, \vec{e}_z \equiv p_0 \cos(\omega t)\, \vec{e}_z$$

Wir bestimmen das retardierte Potential:

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_{(+)}|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}_{(+)}|} - \frac{q\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_{(-)}|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}_{(-)}|}\right]$$

$$= \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\cos\left[\omega\left(t - \frac{K_{(+)}}{c}\right)\right]}{K_{(+)}} - \frac{\cos\left[\omega\left(t - \frac{K_{(-)}}{c}\right)\right]}{K_{(-)}}\right\},$$

$$K_{(\pm)} \equiv \sqrt{r^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \mp r d \cos\vartheta}\,.$$

Für das Fernfeld $(r \gg d)$ lässt sich eine Taylor-Entwicklung durchführen:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \pm \dots\,, \quad x < 1$$

$$\rightarrow K_{(\pm)} = r\sqrt{1 \mp \frac{d}{r}\cos\vartheta + \left(\frac{d}{2r}\right)^2} = r\left[1 \mp \frac{d}{2r}\cos\vartheta + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{r^2}\right)\right]$$

$$\rightarrow \frac{1}{K_{(\pm)}} = \frac{1}{r}\left[1 \pm \frac{d}{2r}\cos\vartheta + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{r^2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \cos\left[\omega\left(t - \frac{K_{(\pm)}}{c}\right)\right] \approx \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \pm \frac{\omega d}{2c}\cos\vartheta\right]$$

$$= \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\cos\left(\frac{\omega d}{2c}\cos\vartheta\right) \mp \sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\sin\left(\frac{\omega d}{2c}\cos\vartheta\right).$$

weitere Näherung: $d \ll \lambda$ bzw. $d \ll \frac{c}{\omega}$

$$\rightarrow \cos\left[\omega\left(t - \frac{K_{(\pm)}}{c}\right)\right] \approx \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \mp \frac{\omega d}{2c}\cos\vartheta\,\sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r},t) \approx \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\left(1 + \frac{d}{2r}\cos\vartheta\right)\left[\cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{\omega d}{2c}\sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\cos\vartheta\right]\right.$$

$$\left. - \frac{1}{r}\left(1 - \frac{d}{2r}\cos\vartheta\right)\left[\cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\omega d}{2c}\sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\cos\vartheta\right]\right\}$$

$$= \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}\, p_0\cos\vartheta\left[\frac{1}{r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{\omega}{c}\sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

(Für $\omega \to 0$ erhält man den statischen Grenzfall.)

Für $r \gg \lambda$ bzw. $\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{c}$ ist der 2. Term führend:

$$\Phi(\vec{r},t) \approx -\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}\,\frac{\omega}{c}\,p_0 \cos\vartheta\, \sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right).$$

alle Näherungen zusammen: $d \ll \lambda \ll r$

→ Bsp. Na-D-Linien: $d \leq 1\,\mathrm{nm}$, $\lambda = 589\,\mathrm{nm}$, $r \gtrsim 1\,\mathrm{cm}$

Zwischen den Metallkugeln fließt der Strom $\vec{I}(t) = \frac{dq}{dt}\vec{e}_z = -q_0\omega\sin(\omega t)\vec{e}_z$ und man kann das retardierte Vektorpotential bestimmen:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}\left(\vec{r}\,',\, t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV'$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\,q_0\omega \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\sin\omega\left(t-\frac{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}}{c}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}}\,dz'\,\vec{e}_z.$$

Mit Hilfe der Mittelwerteigenschaft (siehe Diskussion Laplace-Gleichung) lässt sich für kleine d eine Näherung anstellen durch

$$F(0) = \frac{1}{d}\left[F\left(-\frac{d}{2}\right) + F\left(\frac{d}{2}\right)\right].$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r},t) \approx -\frac{\mu_0}{4\pi r}\,p_0\omega\,\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\vec{e}_z$$

Aus den Potentialen folgen die Felder:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\operatorname{grad}\Phi(\vec{r},t) - \partial_t\vec{A}(\vec{r},t) = \ldots = -\frac{\mu_0}{4\pi r}\,p_0\omega^2\sin\vartheta\,\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\vec{e}_\vartheta,$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r},t) = \ldots = -\frac{\mu_0}{4\pi r}\,\frac{\omega^2}{c}\,p_0\sin\vartheta\,\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\vec{e}_\varphi$$

Das sind monochromatische sphärische Wellen, deren Amplitude mit $1/r$ fällt. Die Flächen konstanter Phase sind durch $r = \mathrm{const}$ gegeben.

Poynting-Vektor:

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\right) = \frac{\mu_0}{c}\left[\frac{p_0\omega^2}{4\pi}\,\frac{\sin\vartheta}{r}\,\cos\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]^2\vec{e}_r$$

zeitl. Mittelung:

$$\langle\vec{S}\rangle(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\vec{S}\left(\vec{r},\frac{x}{\omega}+\frac{r}{c}\right)dx = \frac{\mu_0}{32\pi^2}\,\frac{\omega^4}{c}\,p_0^2\,\frac{\sin^2\vartheta}{r^2}\,\vec{e}_r$$

abgestrahlte Leistung:

$$\langle P\rangle = \int_{S_r}\langle\vec{S}\rangle(\vec{r}')\,d\vec{f}' = \frac{\mu_0 p_0^2}{32\pi^2}\,\frac{\omega^4}{c}\int\sin^3\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = \underline{\frac{\mu_0 p_0^2}{12\pi}\,\frac{\omega^4}{c}}$$

Die mittlere abgestrahlte Leistung ist r-unabhängig (da der Grenzübergang $r\to\infty$ bereits implizit in der Näherung $r \gg \lambda$ vorgenommen wurde).