Gruppen, Algebren und Darstellungen

Lie-Gruppen, Lie-Algebren sowie deren Darstellungen finden an mehreren Stellen der Vorlesung Erwähnung. Daher sei hier ein kurzer (sehr unvollständiger) Überblick gegeben.

Symmetrietransformationen sind Transformationen, die physikalische Eigenschaften eines Systems invariant lassen. Da sie per Definition über die folgenden Eigenschaften verfügen, bilden sie eine <u>Gruppe</u>:

1. Die Hintereinanderausführung zweier Symmetrietransformationen ist wieder eine Symmetrietransformation.
2. Die Umkehrung einer Symmetrietransformation ist wieder eine Symmetrietransformation.
3. Die Identität ist eine Symmetrietransformation.

Eine spezielle Klasse[1] von Gruppen sind die <u>Lie-Gruppen.</u> Ein paar Beispiele wichtiger Lie-Gruppen:

- $SO(3,\mathbb{R})$: Die spezielle orthogonale Gruppe umfasst die Drehungen im 3-dimensionalen Raum. Sie kann definiert werden als die Menge aller (3×3)-Matrizen mit reellen Einträgen und Determinante 1, die $O^T O = \mathbb{1}_3$ erfüllen.
- $O(3,1)$: Die Lorentz-Gruppe umfasst die Lorentz-Transformationen des $(3+1)$-dimensionalen Raumes (bzw. Raumzeit) der speziellen Relativitätstheorie.

1: Solche, die gleichzeitig eine sogenannte Mannigfaltigkeit bilden. Das ist wichtig, um die zugehörige Lie-Algebra definieren zu können.

- $iO(3,1)$: Die inhomogene orthogonale Gruppe (oder Poincaré-Gruppe) umfasst außer den Lorentz-Transformationen noch die Translationen.
- $SU(2,\mathbb{C})$: Die spezielle unitäre Gruppe ist die Drehgruppe der Quantenmechanik und wird zur Beschreibung des Spins benötigt. Sie kann definiert werden als die Menge der (2×2)-Matrizen mit komplexen Einträgen, die $U^\dagger U = \mathbb{1}_2$ erfüllen und deren Determinante 1 ist.

Zu jeder Lie-Gruppe G lässt sich durch Bildung des Tangentialraumes (Entwicklung am Einselement bis zur 1. Ordnung) eine zugehörige <u>Lie-Algebra</u> finden.

Definition: Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, versehen mit einer bilinearen Abbildung („Lie-Klammer")

$$[\cdot\,,\cdot]: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g},$$

welche
1. alternierend ist: $[X,X]=0 \quad \forall X\in\mathfrak{g}$;
2. die Jacobi-Identität erfüllt:
$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.$$

Liegt eine aus Matrizen bestehende Lie-Algebra vor, ist die Lie-Klammer gerade der Kommutator $[A,B]=AB-BA$.

Während die Lie-Gruppen alle endlichen Symmetrietransformationen umfassen, werden die Lie-Algebren durch die infinitesimalen Symmetrietrietransformationen gebildet.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{Lie-Gruppe } G} \arrow[r, shift left, "\text{Entwicklung am Einselement}"] & \boxed{\text{Lie-Algebra } \mathfrak{g}} \arrow[l, shift left, "\text{Exponentialabbildung}"] \\
\text{endliche Symmetrietransformationen} \arrow[u] & \text{infinitesimale Symmetrietransformationen} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Die den oben aufgeführten Lie-Gruppen zugehörigen Lie-Algebren sind:

- $so(3, \mathbb{R})$: mögliche Definition durch antisymmetrische reelle Matrizen;
- $so(3,1)$;
- $iso(3,1)$;
- $su(2, \mathbb{C})$: mögliche Definition durch antihermitesche, spurlose Matrizen mit komplexen Einträgen.

Die Basiselemente einer Lie-Algebra bezeichnet man auch als <u>Erzeugende</u> oder <u>Generatoren</u>.

<u>Beispiel:</u> Die kartesischen Komponenten L_i des Drehimpulsoperators generieren die Lie-Algebra $so(3)$.
Ihre Lie-Klammer ist der Kommutator

$$[L_i, L_j] = i\, \varepsilon_{ijk} L_k \, .$$

etwas Darstellungstheorie

Gruppen- und Algebraelemente sind zunächst abstrakte Elemente; letztere sind ausschließlich durch ihre Lie-Klammer definiert. Daher benötigt man <u>Darstellungen</u>, um ihre Wirkung konkret beschreiben zu können.

Eine Darstellung ordnet jedem Algebraelement eine lineare Abbildung über einem Vektorraum zu:

$$D: \ \mathfrak{g} \longrightarrow gl(V) \ , \qquad \mathfrak{g} \ni g \longmapsto D(g).$$

Sie erhält die Struktur der Lie-Algebra, sodass die Lie-Klammer in den Kommutator (der Bilder in $gl(V)$) über geht:

$$D(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lie-Klammer}}}{[g_1, g_2]}) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kommutator}}}{[D(g_1), D(g_2)]}, \qquad \forall g_1, g_2 \in \mathfrak{g}.$$

Die gute Nachricht: Jede endlich-dimensionale komplexe Lie-Algebra kann durch Matrizen dargestellt werden.

Beachte, dass mit der Wahl einer Darstellung gleichzeitig festgelegt wird, auf welche Objekte die Algebraelemente wirken; bspw. wird man eine (3×3)-Matrix an einen 3-komponentigen Vektor multiplizieren, nicht an ein Skalar.

<u>Bem.:</u> Jede Darstellung einer Lie-Gruppe G induziert eine Darstellung der zugehörigen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$.

Beispiel: SO(3, ℝ) und so(3)

Die Lie-Gruppe $SO(3,\mathbb{R})$ enthält die Drehungen im 3-dimensionalen (euklidischen) Raum. Sie ist offenbar von Dimension 3, da sich jede Raumdrehung aus Drehungen um die 3 Achsen zusammensetzen lässt – diese sind die Basis-Elemente.

Die folgende Darstellung dieser Gruppe wird auch als „definierende" Darstellung bezeichnet:

Eins-Element:

$$e \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Basis-Elemente:

$$g_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$ Drehung um die x-Achse

$$g_2 \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$ Drehung um die y-Achse

$$g_3 \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Drehung um die z-Achse

Eine Darstellung der Generatoren der zugehörigen Lie-Algebra so(3) ist:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bem.: Die Lie-Algebren so(3) und su(2) sind (fast) identisch. Daher ist die durch die Pauli-Matrizen,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

gegebene Darstellung der su(2) ebenfalls eine Darstellung der so(3).

Ein wichtiger Begriff in der Darstellungstheorie ist die Irreduzibilität einer Darstellung. Eine Darstellung heißt <u>reduzibel</u>, wenn die Darstellungsmatrizen Blockform haben:

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & & \\ & D_2(g) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Man sagt, sie „zerfällt" in irreduzible Darstellungen und schreibt $D = D_1 \oplus D_2 \oplus \dots$.

Eine wichtige Anwendung dessen ist die Addition von quantenmechanischen Drehimpulsen: Setzt man ein System aus zwei Drehimpulsen zusammen, so ist der sich ergebende Darstellungsraum das Tensorprodukt der beiden ursprünglichen. Dieses zerfällt in irreduzible Darstellungen gemäß

$$\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2} = \mathcal{H}_{|j_1-j_2|} \oplus \mathcal{H}_{|j_1-j_2|+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_{j_1+j_2},$$

wobei ein System des Drehimpulses j_1 und eines des Drehimpulses j_2 zusammengesetzt werden.