Beispielrechnung: Fermionen im Potentialtopf

Wir betrachten N identische, nicht-wechselwirkende Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen im eindimensionalen Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls } 0 \leq x \leq a \\ \infty\,, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Fragen:
- Welches Energieniveau ist durch den höchsten Zustand im Spektrum besetzt, falls sich das System im Grundzustand befindet?
- Wie lautet die Energie E_0 des Grundzustandes des Systems?
- Wie verhält sich E_0 im Limes $N \gg 1$?
- Welche Energie hätte der Grundzustand für ein analoges System aus N nicht-wechselwirkenden Bosonen?

---

aus QM I bekannt: normierte Wellenfunktion: $\phi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin(nkx)$

Energie-Eigenwerte: $E_n = \frac{k^2 n^2}{2m}$

Entartungsgrad: 2 (für jedes n Spin up/down)

$\Rightarrow$ höchster besetzter Zustand: $n_{max} = \begin{cases} N/2\,, & N \text{ gerade} \\ N{+}1/2\,, & N \text{ ungerade} \end{cases}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E_{n_{max}} = \frac{k^2}{8m} \cdot \begin{cases} N^2\,, & N \text{ gerade} \\ (N+1)^2\,, & N \text{ ungerade} \end{cases}}}$$

Energie des Systems im Grundzustand: $E_0 = 2 \sum_n E_n$

n gerade:

$$E_0^{(e)} = \frac{k^2}{m} \sum_{n=1}^{N/2} n^2 = \frac{k^2}{24m}\left(N^3 + 3N^2 + 2\right)$$

Summe der Quadratzahlen: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

n ungerade:

$$E_0^{(o)} = \frac{k^2}{m} \sum_{n=1}^{(N-1)/2} n^2 + \frac{k^2}{2m}\left(\frac{N+1}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{24m}\left(N^3 + 3N^2 + 5N + 3\right)$$

(Der letzte Zustand zählt nicht doppelt.)

Limes $N \gg 1$: $E_0^{(e)} \approx E_0^{(o)} = \frac{k^2}{24m} N^3 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$

für N Bosonen: Alle Teilchen können gleichzeitig den Grundzustand mit E_1 einnehmen.

$$\rightarrow E_0 = N \cdot E_1 = \frac{k^2}{2m} N^2$$