Bilder in der Quantenmechanik (Wiederholung)

Für die Zeitentwicklung physikalischer Systeme bedient man sich verschiedener Bilder. Sie sind äquivalent, aber unterschiedlich gut zur Behandlung verschiedener Problemstellungen geeignet.

1. Das Schrödinger-Bild

Die Zustände werden (anders als die Operatoren) als zeitabhängig angenommen, sodass für den Erwartungswert eines Operators gilt:

$$\langle A \rangle (t) = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle .$$

Die Zeitentwicklung erfolgt mittels des unitären Zeitentwicklungsoperators,

$$|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)\, |\psi(t_0)\rangle ,$$

und die Zustände gehorchen der Schrödinger-Gleichung.
Die Dyson'sche Entwicklung führt auf

$$U(t,t_0) = \mathcal{T} \exp\left(-i \int_{t_0}^{t} dt'\; H(t') \right).$$

Hier ist $\mathcal{T}$ der sogenannte Zeitordnungsoperator und die Exponentialfunktion ist als Reihenentwicklung aufzufassen, wobei:

$$\left(\int dt'\; H(t') \right)^n = \int dt_1\, H(t_1) \int dt_2\, H(t_2) \ldots \int dt_n\, H(t_n).$$

2. Das Heisenberg-Bild

Die Operatoren werden als zeitabhängig aufgefasst, die Zustände als zeitunabhängig:

$$A(t) := U^{\dagger}(t,t_0)\, A\, U(t,t_0), \qquad \text{linke Seite: Heisenberg,}$$
$$|\psi\rangle := U^{\dagger}(t,t_0)\,|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle. \qquad \text{rechte Seite: Schrödinger}$$

Die Operatoren gehorchen der Heisenberg Gleichung:

$$\frac{d}{dt} A(t) = \frac{1}{i}\left[A(t), H(t)\right] + \partial_t A(t).$$

Für die Orts- und Impulsoperatoren im Heisenberg-Bild gilt das Ehrenfest-Theorem:

$$m \frac{d}{dt}\langle \vec{x}(t)\rangle = \langle \vec{p}(t)\rangle \;, \qquad \frac{d}{dt}\langle \vec{p}(t)\rangle = -\langle \operatorname{grad} V(\vec{x})\rangle .$$

3. Das Wechselwirkungsbild

Der Hamiltonoperator wird in einen konstanten (konservativen) und einen zeitabhängigen Teil aufgespalten:

$$H = H_0 + V(t).$$

Die Zeitentwicklung der Zustände erfolgt bezüglich H_0,

$$U_0(t,t_0) = e^{-i(t-t_0)H_0}.$$

Die Zustände und Operatoren im Wechselwirkungsbild sind

$$|\psi_W(t)\rangle := U_0^\dagger(t,t_0)\,|\psi(t)\rangle,$$

$$A_W(t) := U_0^\dagger(t,t_0)\;A\;U_0(t,t_0).$$

Sie gehorchen den Dirac'schen Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}A_W(t) = i\left[H_0, A_W(t)\right] + \partial_t A_W(t),$$

$$i\partial_t|\psi_W(t)\rangle = V_W(t)\,|\psi_W(t)\rangle.$$

Die zweite Gleichung kann iterativ gelöst werden und führt auf

$$|\psi_W(t)\rangle = S(t,t_0)\,|\psi_W(t_0)\rangle$$

mit $S(t,t_0) := \mathcal{T}\exp\left(-i\int_{t_0}^{t} dt'\,V_W(t')\right).$

Man definiert die <u>Streumatrix</u> als

$$S := \lim_{\substack{t\to\infty \\ t_0\to-\infty}} S(t,t_0) = \mathcal{T}\exp\left(-i\int_{-\infty}^{\infty} dt\,V_W(t)\right).$$

Sie beschreibt die Streuung am Potential bezüglich asymptotischer Zustände,

$$|\psi_{out}\rangle = S\,|\psi_{in}\rangle.$$