Clebsch-Gordan-Koeffizienten

Wir betrachten ein aus zwei Drehimpulsen $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_2$ zusammengesetztes System mit den Quantenzahlen der Teilsysteme j_1, m_1 und j_2, m_2. Dann sind die Produktzustände dieses Systems

$$|j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle \equiv |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle .$$

In Ortsdarstellung multiplizieren sich entsprechend die Wellenfunktionen:

$$\langle \vec{x}_1 \vec{x}_2 | j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle \equiv \psi_{j_1 m_1}(\vec{x}_1)\, \psi_{j_2 m_2}(\vec{x}_2).$$

Offenbar bilden die $|j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle$ eine vollständige orthonormale Basis des $(2j_1+1)(2j_2+1)$-dimensionalen Zustandsraumes.

Wir führen jetzt den Gesamtdrehimpuls $\vec{J} := \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ ein, der wie die $\vec{J}_{1|2}$ die Drehimpulsalgebra erfüllt,

$$\begin{aligned}[J_i, J_j] &= [J_{1i} + J_{2i}, J_{1j} + J_{2j}] = \underbrace{[J_{1i}, J_{1j}]}_{i\varepsilon_{ijk} J_{1k}} + \underbrace{[J_{1i}, J_{2j}]}_{0} + \underbrace{[J_{2i}, J_{1j}]}_{0} + \underbrace{[J_{2i}, J_{2j}]}_{i\varepsilon_{ijk} J_{2k}} \\ &= i\varepsilon_{ijk} J_k ,\end{aligned}$$

und dem die Quantenzahlen j, m zugeordnet sind,

$$\begin{aligned}\vec{J}^2 |j m\rangle &= j(j+1)|j m\rangle, \\ J_z |j m\rangle &= m |j m\rangle.\end{aligned}$$

Es bilden die $|j m\rangle \equiv |j_1 j_2 j m\rangle$ ebenfalls ein vollständiges Orthonormalsystem.
Aus der Orthonormiertheit der $|j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle$ folgt, wie die $|j m\rangle$ durch die $|j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle$ ausgedrückt werden können:

$$\mathbb{1} = \sum_{m_1, m_2} |j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle\langle j_1 m_1\, j_2 m_2|$$

$$\Downarrow$$

$$|jm\rangle = \mathbb{1}\cdot|jm\rangle = \sum_{m_1,m_2} \underbrace{\langle j_1 m_1\, j_2 m_2 | jm\rangle}_{\text{Clebsch-Gordan-Koeffizienten}} |j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle$$

Die CG-Koeffizienten vermitteln zwischen den beiden Basis-Sets. Damit ist $|\langle j_1 m_1\, j_2 m_2 | jm\rangle|^2$ die Wahrscheinlichkeit, dass im Zustand $|j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle$ der Gesamtdrehimpuls des Systems j und dessen Projektion auf die z-Achse m beträgt.

Auswahlregel für m:

$$J_z|jm\rangle = \sum_{m_1,m_2} \langle j_1 m_1\, j_2 m_2 | jm\rangle \overbrace{(J_{1z} + J_{2z})}^{J_z} |j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle$$

$$= \sum_{m_1,m_2} \langle j_1 m_1\, j_2 m_2 | jm\rangle |j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle (m_1 + m_2)$$

$$J_z|jm\rangle = m|jm\rangle = \sum_{m_1',m_2'} \langle j_1 m_1'\, j_2 m_2' | jm\rangle |j_1 m_1'\, j_2 m_2'\rangle\, m$$

Koeffizientenvergleich ($m_1 = m_1'$, $m_2 = m_2'$):

$$(m_1 + m_2 - m)\langle j_1 m_1\, j_2 m_2 | jm\rangle = 0$$

=> Entweder ist $m = m_1 + m_2$ oder der CG-Koeffizient verschwindet.

Dreiecksregel:

Feststellung: Da $m \leq j$ sowie $m_1 \leq j_1$, $m_2 \leq j_2$ gelten, kann der maximale Wert j_{max} der Quantenzahl j nicht $j_1 + j_2$ überschreiten. Sonst würde kein zugehöriges m_{max} existieren.

$$\Rightarrow \quad j_{max} = j_1 + j_2$$

Anzahl der Zustände $|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$: $\quad (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$

Anzahl der Zustände $|j m\rangle$: $\quad 2j + 1$ für jedes erlaubte j

$$\rightarrow \quad (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \overset{!}{=} \sum_{j = j_{min}}^{j_1 + j_2} (2j + 1)$$

arithmetische Folge: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1)$

$$= \sum_{k=1}^{2(j_1+j_2)} k - \sum_{k=1}^{2j_{min}-1} k + j_1 + j_2 - j_{min} + 1$$

$$= 2j_1^2 + 2j_2^2 + 2(j_1 + j_2 + 2j_1 j_2) - 2j_{min}^2 + 1$$

$$\Rightarrow \quad j_{min} = \sqrt{j_1^2 + j_2^2 - 2j_1 j_2} = \sqrt{(j_1 - j_2)} = |j_1 - j_2|$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2}}$$

Wie immer können wir die Leiteroperatoren definieren:

$$J_\pm := J_x \pm i J_y \qquad \text{für Gesamtdrehimpuls}$$

$$\left.\begin{aligned} J_{1\pm} &:= J_{1x} \pm i J_{1y} \\ J_{2\pm} &:= J_{2x} \pm i J_{2y} \end{aligned}\right\} \quad \text{für Teilchen 1 und 2}$$

Es gilt:

$$J_\pm |j m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\, |j\, m\pm 1\rangle,$$

und entsprechend für $J_{1\pm}$ und $J_{2\pm}$.

Bestimmung von CG-Koeffizienten:

$$J_\pm |j m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)} \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1\, j_2 m_2 | j\, m\pm 1\rangle |j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle$$

$$J_\pm |j m\rangle = (J_{1\pm} + J_{2\pm}) \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1\, j_2 m_2 | j m\rangle |j_1 m_1\, j_2 m_2\rangle$$

$$= \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1\, j_2 m_2 | j m\rangle \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1\pm 1)}\, |j_1\, m_1\pm 1\;\; j_2 m_2\rangle$$

$$+ \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1\, j_2 m_2 | j m\rangle \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2\pm 1)}\, |j_1 m_1\;\; j_2\, m_2\pm 1\rangle$$

Koeffizientenvergleich:

$$\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\, \langle j_1 m_1\, j_2 m_2 | j\, m\pm 1\rangle$$

$$= \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1\mp 1)}\, \langle j_1\, m_1\mp 1\; j_2 m_2 | j m\rangle + \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2\mp 1)}\, \langle j_1 m_1\, j_2\, m_2\mp 1 | j m\rangle$$

→ Rekursion, beginnend bei $j = m$ mit oberem Vorzeichen:

$$0 = \sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1-1)}\, \langle j_1\, m_1-1\; j_2 m_2 | j j\rangle + \sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2-1)}\, \langle j_1 m_1\, j_2\, m_2-1 | j j\rangle$$

→ außerdem: • Orthogonalität: $\sum_{m_1,m_2} \langle j_1 m_1\, j_2 m_2 | j m\rangle \langle j_1 m_1\, j_2 m_2 | j' m'\rangle = \delta_{jj'}\delta_{mm'}$

• Phasenkonvention: $\langle j_1 j_1\; j_2\, j{-}j_1 | j j\rangle > 0$

→ finde alle $\langle j_1 m_1\, j_2 m_2 | j j\rangle$, dann unteres Vorzeichen zur Bestimmung von $\langle j_1 m_1\, j_2 m_2 | j\, j{-}1\rangle$

<u>Beispiel:</u> $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$, $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$, $j = 0$

① $0 = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\,\langle \tfrac{1}{2}\, {-\tfrac{1}{2}}\; \tfrac{1}{2}\, \tfrac{1}{2} | 00\rangle + \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\,\langle \tfrac{1}{2}\, \tfrac{1}{2}\; \tfrac{1}{2}\, {-\tfrac{1}{2}} | 00\rangle$

$\rightarrow \langle \tfrac{1}{2}\, {-\tfrac{1}{2}}\; \tfrac{1}{2}\, \tfrac{1}{2} | 00\rangle = -\langle \tfrac{1}{2}\, \tfrac{1}{2}\; \tfrac{1}{2}\, {-\tfrac{1}{2}} | 00\rangle \qquad (*)$

② $1 = \sum_{m_1} \langle \tfrac{1}{2}\, m_1\; \tfrac{1}{2}\, {-m_1} | 00\rangle \langle \tfrac{1}{2}\, m_1\; \tfrac{1}{2}\, {-m_1} | 00\rangle$

$= \langle \tfrac{1}{2}\, \tfrac{1}{2}\; \tfrac{1}{2}\, {-\tfrac{1}{2}} | 00\rangle^2 + \langle \tfrac{1}{2}\, {-\tfrac{1}{2}}\; \tfrac{1}{2}\, \tfrac{1}{2} | 00\rangle^2$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \langle \tfrac{1}{2}\, \tfrac{1}{2}\; \tfrac{1}{2}\, {-\tfrac{1}{2}} | 00\rangle^2 = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \underline{\underline{\langle \tfrac{1}{2}\, \tfrac{1}{2}\; \tfrac{1}{2}\, {-\tfrac{1}{2}} | 00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}}}$

In der Praxis verwendet man

- Mathematica → ClebschGordan[{j_1,m_1}, {j_2,m_2}, {j,m}],
- Online-Interfaces (bspw. www.volya.net/vc/vc.php),
- Tabellenwerke, bspw. R. Zare: „Angular Momentum. Understanding Spatial Aspects in Chemistry and Physics";
  A. Edmonds: „Angular Momentum in Quantum Mechanics".

Es gibt auch eine analytische Bestimmungsformel (Giulio Racah).

Sollte man sich dennoch mit der manuellen Berechnung herumschlagen müssen, kann man sich noch die folgenden nützlichen Symmetrien zu eigen machen:

$$
\begin{aligned}
&\langle j_1\, m_1\;\, j_2\, m_2 \,|\, j\, m \rangle \\
&= (-1)^{j_1+j_2-j} \langle j_1\, -m_1\;\, j_2\, -m_2 \,|\, j\, -m \rangle \\
&= (-1)^{j_1+j_2-j} \langle j_2\, m_2\;\, j_1\, m_1 \,|\, j\, m \rangle \\
&= (-1)^{j_1-m_1} \sqrt{\frac{2j+1}{2j_2+1}} \langle j_1\, m_1\;\, j\, -m \,|\, j_2\, -m_2 \rangle \\
&= (-1)^{j_2+m_2} \sqrt{\frac{2j+1}{2j_1+1}} \langle j\, -m\;\, j_2\, m_2 \,|\, j_1\, -m_1 \rangle \,.
\end{aligned}
$$