Die Dirac-Gleichung

Die Dirac-Gleichung liefert eine relativistische Beschreibung massiver Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ und lautet:

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0.$$

Erläuterung: → ψ ist ein Spinor mit komplexen Einträgen, $\psi \in \mathbb{C}^n$; hier:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix}.$$

→ Die sogenannte „Slash-Notation" ist bloß eine Abkürzung:

$$\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 + \gamma^1 \partial_1 + \gamma^2 \partial_2 + \gamma^3 \partial_3 .$$

→ Die γ^μ $(\mu = 0,1,2,3)$ sind Elemente einer sogenannten Clifford-Algebra, welche definiert ist durch die Antikommutatorrelationen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\,\mathbb{1}.$$

Die γ^μ sind zunächst abstrakte Algebra-Elemente. Für sie gibt es verschiedene Matrix-Darstellungen, die sich der Pauli-Matrizen σ^k $(k = 1,2,3)$ bedienen. Die drei wichtigsten Darstellungen sind:

- die Dirac-Darstellung:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \\ & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} & \sigma^k \\ -\sigma^k & \end{pmatrix};$$

- die chirale Darstellung (auch Weyl-Darstellung):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & \end{pmatrix}, \qquad \gamma^k = \begin{pmatrix} & -\sigma^k \\ \sigma^k & \end{pmatrix};$$

- die Majorana-Darstellung:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \\ & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & \\ & i\sigma^3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} & i\sigma^1 \\ i\sigma^1 & \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} i\sigma^1 & \\ & -i\sigma^1 \end{pmatrix}.$$

Alle drei Darstellungen (Basis-Systeme der Clifford-Algebra) sind unitär-äquivalent.
In der chiralen Darstellung zerfallen die Spinoren in links- und rechtshändige Anteile,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}.$$

Man definiert den Dirac-adjungierten Spinor als

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0,$$

da er sich (im Gegensatz zu $\psi^\dagger$) „richtig" unter Lorentz-Transformationen verhält. Erfüllt ψ die Dirac-Gleichung, so erfüllt sie $\bar{\psi}$ in der adjungierten Form

$$\bar{\psi}\,(-i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} - m) = 0,$$

wobei sich die Ableitung nach links wirkend vorzustellen ist.

Aus der Lorentz-invarianten Wirkung

$$S = \int d^4x \;\; \bar{\psi}(x)\,(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi(x)$$

gewinnt man die Dirac-Gleichung durch Variation bzgl. $\bar{\psi}$ oder ψ.

Man zeigt leicht, dass die Dirac-Gleichung die Klein-Gordon-Gleichung für jede Spinor-Komponente impliziert:

$$0 = (i\not{\partial} - m)\psi = (i\not{\partial} + m)(i\not{\partial} - m)\psi = -(\not{\partial}\not{\partial} + m^2)\psi$$

$$= -(\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\psi$$

$$\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu = \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu + \underbrace{\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\mu\partial_\nu}_{\text{Umbenennung } \mu\to\nu,\ \nu\to\mu}\right) = \gamma^\mu\gamma^\nu\partial_\mu\partial_\nu$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}\partial_\mu\partial_\nu + m^2\right)\psi$$

$$= -(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + m^2)\psi = -(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\psi$$

$$\Rightarrow \underline{(\Box + m^2)\psi = 0}$$

Da hier keine γ^μ mehr vorkommen, welche die Komponenten von ψ vermischen würden, gilt diese Gleichung für jede Komponente einzeln. Genauer gesagt: Auf der linken Seite steht nur noch die Einheitsmatrix (die üblicherweise nicht mitgeschrieben wird).

Lösung der Dirac-Gleichung durch ebene Wellen

Wir schreiben zunächst den Dirac-Operator in Weyl-Darstellung aus:

$$i\partial\!\!\!/ - m \equiv i\gamma^\mu \partial_\mu - m\mathbb{1}_4 = i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^1\partial_1 + i\gamma^2\partial_2 + i\gamma^3\partial_3 - m\mathbb{1}_4$$

$$= i\begin{pmatrix} & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & \end{pmatrix}\partial_0 + i\begin{pmatrix} & -\sigma^1 \\ \sigma^1 & \end{pmatrix}\partial_1 + i\begin{pmatrix} & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & \end{pmatrix}\partial_2$$

$$+ i\begin{pmatrix} & -\sigma^3 \\ \sigma^3 & \end{pmatrix}\partial_3 - m\begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \\ & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -m\mathbb{1}_2 & i(\mathbb{1}_2\partial_0 - \sigma^1\partial_1 - \sigma^2\partial_2 - \sigma^3\partial_3) \\ i(\mathbb{1}_2\partial_0 + \sigma^1\partial_1 + \sigma^2\partial_2 + \sigma^3\partial_3) & -m\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

Abkürzung: $\sigma \equiv (\mathbb{1}_2, -\sigma^k)$, $\bar{\sigma} \equiv (\mathbb{1}_2, \sigma^k)$

$$= \begin{pmatrix} -m\mathbb{1}_2 & i\sigma^\mu\partial_\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu & -m\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}.$$

Ansatz ebener Welle:

$$\psi(x) = u(\vec{k})\, e^{-ikx} \equiv \begin{pmatrix} u_1(\vec{k}) \\ u_2(\vec{k}) \end{pmatrix} e^{-ik_\mu x^\mu} \rightarrow \partial_\mu \psi(x) = -ik_\mu \psi(x)$$

$$\Rightarrow (i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) = \begin{pmatrix} -m\mathbb{1}_2 & \sigma^\mu k_\mu \\ \bar{\sigma}^\mu k_\mu & -m\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(\vec{k}) \\ u_2(\vec{k}) \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} (k\bar{\sigma})\, u_1(\vec{k}) &= m\, u_2(\vec{k}) \\ (k\sigma)\, u_2(\vec{k}) &= m\, u_1(\vec{k}) \end{aligned}\right\}$$

Beide Gleichungen implizieren einander, was aus der Identität $(k\sigma)(k\bar{\sigma}) = k_\mu k^\mu = m^2$ folgt.

Ansatz:
$$u_1(\vec{k}) = (k\sigma)\,\xi' \longrightarrow u_2(\vec{k}) = m\,\xi'$$

Also ist $u(\vec{k}) = A \begin{pmatrix} (k\sigma)\,\xi' \\ m\,\xi' \end{pmatrix}$ eine Lösung.

Wir wollen das noch etwas verschönern durch
$$A = \frac{1}{m}, \qquad \xi' \equiv \sqrt{k\bar{\sigma}}\,\xi,$$

sodass:
$$\underline{\underline{u(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \sqrt{k\sigma}\,\xi \\ \sqrt{k\bar{\sigma}}\,\xi \end{pmatrix}}}$$

Hierbei ist ξ ein beliebiger 2-komponentiger Spinor, der meist gemäß $\xi^\dagger \xi = 1$ normiert wird.

<u>Bem.:</u> Man findet auch Lösungen negativer Frequenz mittels des Ansatzes
$$\psi(x) = v(\vec{k})\, e^{ikx}.$$

Die zugehörige Lösung ist
$$v(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \sqrt{k\sigma}\,\eta \\ -\sqrt{k\bar{\sigma}}\,\eta \end{pmatrix}.$$

Beide Lösungen haben positive Energie.

Die Dirac-Gleichung in Hamilton'scher Form

Wir wollen die Dirac-Gleichung in die Form einer Schrödinger-Gleichung bringen,

$$i \partial_t \psi = H \psi .$$

Dazu muss ein selbstadjungierter Hamiltonoperator, $H^\dagger = H$, konstruiert werden.

→ neues Basis-System α^μ mit $\alpha^0 \equiv \gamma^0$, $\alpha^k \equiv \gamma^0 \gamma^k$

→ in Dirac-Darstellung: $\alpha^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \\ & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$, $\alpha^k = \begin{pmatrix} & \sigma^k \\ \sigma^k & \end{pmatrix}$

Hamiltonoperator:

$$H = \underbrace{-i \alpha^k \partial_k}_{\text{kinetischer Term}} + \underbrace{m \alpha^0}_{\text{Ruhemasse}} \xrightarrow{\text{Impulsraum}} \alpha^k p_k + \alpha^0 m$$

Im kräftefreien Fall gilt $H\psi = E\psi$.

Auch hier kann man ebene Wellen als Lösungen finden,

Ansatz: $\psi(\vec{r}) = u(k)\, e^{ikz}$ mit $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$.

Wir schreiben H aus:

$$H = \begin{pmatrix} m \mathbb{1}_2 & -i\sigma^k \partial_k \\ -i\sigma^k \partial_k & -m \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} m\,\mathbb{1}_2 & \sigma^3 k \\ \sigma^3 k & -m\,\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} u(k) = E\, u(k)$$

$$\begin{pmatrix} m & 0 & k & 0 \\ 0 & m & 0 & -k \\ k & 0 & -m & 0 \\ 0 & -k & 0 & -m \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind

$$\left.\begin{aligned} E_+ &= \sqrt{k^2+m^2}\,, \\ E_- &= -\sqrt{k^2+m^2}\,. \end{aligned}\right\} \text{ je 2-fach entartet}$$

$\Rightarrow$ 4 Eigenvektoren

Das bedeutet, wir haben Lösungen negativer Energie gefunden!

$\longrightarrow$ Idee des Dirac-Sees