Drehimpulsoperatoren

Wir bezeichnen alle Operatoren als Drehimpulsoperatoren, deren Komponenten die Drehimpuls-Algebra erfüllen:

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k .$$

Üblicherweise brauchen wir die Drehimpulsoperatoren Bahndrehimpuls $\vec{L}$, Spin $\vec{S}$ und Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

Im Folgenden soll $\vec{J}$ für irgendeinen Drehimpulsoperator stehen.

Die Komponenten J_i sind Basiselemente der durch obige Kommutatorrelation definierten Lie-Algebra so(3).

Schon vor der Wahl einer Darstellung der abstrakten J_i können wir einige Aussagen treffen.

- Das Quadrat des Drehimpulses vertauscht mit jeder seiner kartesischen Komponenten[1], $$[\vec{J}^2, J_i] = 0.$$
- Die Eigenfunktionen des Drehimpulses und einer seiner kartesischen Komponenten sind durch zwei Quantenzahlen j, m_j eindeutig charakterisiert und erfüllen (Wahl der z-Komponente) $$\vec{J}^2 |j\, m_j\rangle = j(j+1)\, |j\, m_j\rangle \quad , \quad J_z |j\, m_j\rangle = m_j\, |j\, m_j\rangle .$$
- Durch komplexe Linearkombination der kartesischen Komponenten lassen sich Auf- und Absteigeoperatoren $$J_\pm := J_x \pm i J_y$$

1: Es heißt $\vec{J}^2$ das „quadratische Casimir-Element" der Lie-Algebra so(3).

definieren, für die gilt:

$$J_\pm \, |j\, m_j\rangle \sim |j\, m_j \pm 1\rangle .$$

- Mit Hilfe der Auf- und Absteigeoperatoren kann man zeigen, dass $j \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$ ganz- oder halbzahlig sein muss und $-j \leq m_j \leq j$ gilt. Das sind $2j+1$ mögliche m_j.
  $\Rightarrow$ Für vorgegebenes j wirken die Drehimpulsoperatoren auf einem $(2j+1)$-dimensionalen Raum, aufgespannt durch die $|j\, m_j\rangle$.

Wir bezeichnen alle Drehimpulsoperatoren mit ganzzahligem j als Bahndrehimpulse und alle mit halbzahligem j als Spin-Operatoren.

Ortsdarstellung des Bahndrehimpulses

Eine konkrete (eindimensionale) Darstellung der Bahndrehimpulse identifiziert die kartesischen Komponenten mit Ableitungen:

$$\begin{aligned} L_x &= -i\,(y\,\partial_z - z\,\partial_y), \\ L_y &= -i\,(z\,\partial_x - x\,\partial_z), \\ L_z &= -i\,(x\,\partial_y - y\,\partial_x). \end{aligned}$$

In dieser Darstellung wirken die L_i offenbar auf Funktionen von x, y und z.

Die Operatoren lassen sich ebenso in Kugelkoordinaten schreiben:

$$\begin{aligned} L_x &= i\,(\sin\varphi\,\partial_\theta + \cot\theta\cos\varphi\,\partial_\varphi), \\ L_y &= i\,(-\cos\varphi\,\partial_\theta + \cot\theta\sin\varphi\,\partial_\varphi), \\ L_z &= -i\,\partial_\varphi. \end{aligned}$$

Dann ist $\vec{L}^2$ gleich dem Winkelanteil des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten. Die Eigenfunktionen sind durch die Kugelflächenfunktionen gegeben:

$$\vec{L}^2 \, Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = l(l+1)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$
$$L_z \, Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = m \, Y_{lm}(\vartheta, \varphi).$$

Darstellung des Spin-Operators

Für Spin-Operatoren existiert im Gegensatz zu Bahndrehimpulsen keine eindimensionale Darstellung.
Im Folgenden beschränken wir uns auf den Spezialfall $s = \frac{1}{2}$. Dann wird die Angabe von s überflüssig und m_s kann nur Werte $\pm\frac{1}{2}$ annehmen; daher die neue Schreibweise:

$$\left|\tfrac{1}{2}\, \tfrac{1}{2}\right\rangle \equiv |\uparrow\rangle \, , \qquad \left|\tfrac{1}{2}\, -\tfrac{1}{2}\right\rangle \equiv |\downarrow\rangle \, .$$

Eine zweidimensionale Darstellung der S_i ist durch die Pauli-Matrizen realisiert:

$$S_x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese Darstellung muss offenbar auf 2er-Vektoren wirken, also schreiben wir für die Eigenzustände:

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Auf- und Absteigeoperatoren $S_\pm$ übernehmen im Spin-$\frac{1}{2}$-Fall die Rolle von „Umklapp-Operatoren":

$$S_+ |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle, \qquad S_+ |\uparrow\rangle = 0,$$
$$S_- |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle, \qquad S_- |\downarrow\rangle = 0.$$

Zusammensetzung zweier Drehimpulse

Betrachtet man ein System aus zwei Teilchen, so bedeutet das die Tensorierung der jeweils einem Teilchen zugeordneten Hilberträume,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 .$$

Entsprechend lässt sich aus einem auf $\mathcal{H}_1$ definierten Drehimpulsoperator J_1 und einem auf $\mathcal{H}_2$ definierten Drehimpuls-Operator J_2 ein auf $\mathcal{H}$ definierter Drehimpuls-Operator J zusammensetzen,

$$\vec{J} := \vec{J}_1 + \vec{J}_2 .$$

Da die $J_{1/2}$ auf verschiedenen Räumen definiert sind, kommutieren sie:

$$[\vec{J}_1, \vec{J}_2] = 0.$$

Es hat $\vec{J}$ per Definition automatisch alle Eigenschaften eines Drehimpulses.

<u>Bsp.:</u> Addition zweier Elektronenspins

Es sei: $\vec{S}_1$ der Spin-Operator des 1. Elektrons,

$$S_{1z}|\uparrow\rangle = \tfrac{1}{2}|\uparrow\rangle\,, \qquad S_{1z}|\downarrow\rangle = -\tfrac{1}{2}|\downarrow\rangle\,, \qquad |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle \in \mathcal{H}_1\,,$$

und $\vec{S}_2$ der Spin-Operator des 2. Elektrons,

$$S_{2z}|\uparrow\rangle = \tfrac{1}{2}|\uparrow\rangle\,, \qquad S_{2z}|\downarrow\rangle = -\tfrac{1}{2}|\downarrow\rangle\,, \qquad |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle \in \mathcal{H}_2\,.$$

Da die Elektronen ununterscheidbar sind, sind $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ identisch.

Wir betrachten die antisymmetrische Spin-Wellenfunktion

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle\otimes|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle\right).$$

Dann gilt z.B.

$$\begin{aligned} S_{1z}|\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\underbrace{\left(S_{1z}|\uparrow\rangle\right)}_{\frac{1}{2}|\uparrow\rangle}\otimes|\downarrow\rangle - \underbrace{\left(S_{1z}|\downarrow\rangle\right)}_{-\frac{1}{2}|\downarrow\rangle}\otimes|\uparrow\rangle\Big] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle\otimes|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle\right), \end{aligned}$$

womit man zeigen kann, dass $\vec{S}^2|\psi\rangle = 0$.