Die Klein-Gordon-Gleichung

Die Klein-Gordon-Gleichung ist eine relativistische Feldgleichung, die massive (oder masselose), spinlose Teilchen beschreibt. Sie lautet:

$$(\Box + m^2)\phi = 0.$$

Dabei ist der Box-Operator eine Abkürzung für

$$\Box \equiv D_\mu D^\mu = \eta_{\mu\nu} D^\mu D^\nu .$$

Es ist D die sogenannte <u>kovariante Ableitung</u>. Der Name rührt vom „richtigen" Verhalten unter Lorentz-Transformationen her. Für die Kopplung des Feldes ϕ an ein Eichfeld (z.B. das elektrodynamische Vektorpotential) gilt:

$$D_\mu = \partial_\mu + i A_\mu .$$

Wie alle fundamentalen Theorien lässt sich auch die Klein-Gordon-Gleichung aus der Variation einer Wirkung ableiten,

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x \left(\partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2\right), \quad \text{hier: } \phi \text{ reell.}$$

Ist ϕ komplex-wertig und erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung, so erfüllt auch sein konjugiertes Feld $\phi^\dagger$ die KG-Gleichung. Man betrachtet dann ϕ und $\phi^\dagger$ als unabhängige Variablen.

Im Folgenden zwei kleine Übungen zum Umgang mit Klein-Gordon-Feldern.

A) Noether - Strom

Offenbar ist die KG-Gleichung invariant unter Phasen-Transformationen $\phi \mapsto e^{i\alpha}\phi$.

$\Rightarrow$ Wir erwarten einen zu dieser Symmetrie gehörenden erhaltenen Strom j.

Wir betrachten die KG-Gleichung für die komplex-wertigen Felder ϕ und $\phi^\dagger$,

$$(D_\mu D^\mu + m^2)\,\phi(x) = 0,$$

und zeigen, dass der Strom

$$j^\mu = \frac{i}{2m}\left(\phi^\dagger D^\mu \phi - (D^\mu\phi)^\dagger \phi\right)$$

erhalten ist, also $\partial_\mu j^\mu = 0$ gilt.

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{i}{2m}\Big[(\partial_\mu \phi^\dagger)\, D^\mu\phi + \phi^\dagger \partial_\mu D^\mu \phi - (\partial_\mu D^\mu \phi)^\dagger \phi - (D^\mu\phi)^\dagger\, \partial_\mu \phi\Big]$$

$$= \frac{i}{2m}\Big[(\partial_\mu\phi^\dagger)(\cancel{\partial^\mu\phi} + iA^\mu\phi) + \phi^\dagger(\partial_\mu\partial^\mu\phi + i\partial_\mu A^\mu\phi) - (\partial_\mu\partial^\mu\phi^\dagger - i\partial_\mu A^\mu\phi^\dagger)\phi - (\cancel{\partial^\mu\phi^\dagger} - iA^\mu\phi^\dagger)\,\partial_\mu\phi\Big]$$

$$= \frac{i}{2m}\Big[i(\partial_\mu\phi^\dagger)\,A^\mu\phi + iA^\mu\phi^\dagger\,\partial_\mu\phi + \phi^\dagger\partial_\mu\partial^\mu\phi - (\partial_\mu\partial^\mu\phi^\dagger)\phi + 2i\,(\partial_\mu A^\mu)\,\phi\phi^\dagger\Big]$$

Nebenrechnung:

$$\phi^\dagger D_\mu D^\mu \phi = \phi^\dagger \partial_\mu \partial^\mu \phi - \phi^\dagger A_\mu A^\mu \phi + i\phi^\dagger (\partial_\mu A^\mu)\phi + i\phi^\dagger A_\mu \partial^\mu \phi,$$

$$(D_\mu D^\mu \phi)^\dagger \phi = (\partial_\mu \partial^\mu \phi^\dagger)\phi - iA_\mu (\partial^\mu \phi^\dagger)\phi - i(\partial_\mu A^\mu)\phi^\dagger\phi - A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi$$

$$\Rightarrow \phi^\dagger D_\mu D^\mu \phi - (D_\mu D^\mu \phi)^\dagger \phi$$

$$= \phi^\dagger \partial_\mu \partial^\mu \phi - (\partial_\mu \partial^\mu \phi^\dagger)\phi + 2i(\partial_\mu A^\mu)\phi\phi^\dagger + i\phi^\dagger A_\mu \partial^\mu \phi$$
$$+ iA_\mu (\partial^\mu \phi^\dagger)\phi$$

$$\Rightarrow \partial_\mu j^\mu = \frac{i}{2m}\Big[\underbrace{\phi^\dagger D_\mu D^\mu \phi}_{\overset{KG}{=} -m^2\phi} - \underbrace{(D_\mu D^\mu \phi)^\dagger}_{\overset{KG}{=} -m^2\phi^\dagger} \phi \Big]$$

$$= \frac{i}{2m}\left(m^2\phi^\dagger\phi - m^2\phi^\dagger\phi\right) = \underline{\underline{0}}$$

Der Strom ist erhalten, wenn beide Felder ϕ, $\phi^\dagger$ die KG-Gleichung erfüllen.

B) Variationsrechnung

Wir betrachten die Lagrange-Dichte der komplexen KG-Felder ϕ und $\phi^\dagger$:

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi,$$

und die Wirkung als Funktional dieser Felder:

$$S[\phi, \phi^\dagger] = \int d^4x \; \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi; \phi^\dagger, \partial_\mu \phi^\dagger)$$

$$= \int d^4x \left[(D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi \right].$$

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial S}{\partial (\partial^\mu \phi)} \delta(\partial^\mu \phi) + \frac{\partial S}{\partial \phi^\dagger} \delta \phi^\dagger + \frac{\partial S}{\partial (\partial_\mu \phi^\dagger)} \delta(\partial_\mu \phi^\dagger)$$

$$= \int d^4x \Big[(-m^2 \phi^\dagger + i A^\mu (D_\mu \phi)^\dagger) \delta \phi + (-m^2 \phi - i A_\mu D^\mu \phi) \delta \phi^\dagger$$
$$+ (D_\mu \phi)^\dagger \delta(\partial^\mu \phi) + (D^\mu \phi) \delta(\partial_\mu \phi^\dagger) \Big]$$

Wir nutzen die Produktregel:

$$\partial^\mu \left((D_\mu \phi)^\dagger \delta \phi \right) = \partial^\mu (D_\mu \phi)^\dagger \delta \phi + (D_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \delta \phi),$$

$$\partial_\mu \left(D^\mu \phi \; \delta \phi^\dagger \right) = (\partial_\mu D^\mu \phi) \delta \phi^\dagger + (D^\mu \phi)(\partial_\mu \delta \phi^\dagger).$$

Außerdem entfallen die Oberflächenterme $\partial^\mu(\ldots)$ und $\partial_\mu(\ldots)$, da sie an den Rändern des Integrals ausgewertet werden (partielle Integration) und dort sämtliche Variationen verschwinden.

$$\rightarrow \quad \delta S = \int d^4x \Big[\left(-m^2 \phi^\dagger + iA^\mu (D_\mu \phi)^\dagger - \partial^\mu (D_\mu \phi)^\dagger \right) \delta\phi$$
$$+ \left(-m^2 \phi - iA_\mu D^\mu \phi - \partial_\mu D^\mu \phi \right) \delta\phi^\dagger \Big]$$

$$= -\int d^4x \Big\{ \left[(D^\mu D_\mu \phi)^\dagger + m^2 \phi^\dagger \right] \delta\phi$$
$$+ \left[(D_\mu D^\mu \phi) + m^2 \phi \right] \delta\phi^\dagger \Big\} \overset{!}{=} 0$$

Für beliebige Variationen $\delta\phi$ und $\delta\phi^\dagger$ folgen daraus die beiden Klein-Gordon-Gleichungen:

$$(D_\mu D^\mu + m^2)\, \phi^\dagger = 0,$$
$$(D_\mu D^\mu + m^2)\, \phi = 0. \qquad \|$$