Zu Lorentz- und Spintransformationen

Die Poincaré-Algebra, kurz iso(3,1), setzt sich aus Lorentz-Transformationen und Translationen zusammen.

Erzeuger: P_μ - Translationen

$J_{\mu\nu}$ - Lorentz-Transformationen

Lie-Algebra-Struktur:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i\left(\eta_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} - \eta_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} J_{\nu\rho}\right), \qquad (1)$$

$$[J_{\mu\nu}, P_\rho] = i\left(\eta_{\mu\rho} P_\nu - \eta_{\nu\rho} P_\mu\right), \qquad (2)$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \qquad (3)$$

Man zerlegt die Lorentz-Transformationen in einen Bahn- und einen Spinanteil:

$$J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} + \Sigma_{\mu\nu}.$$

Die (infinitesimalen) Erzeuger der...

... Translationen sind Impulse, $P_\mu = -i\partial_\mu$.

... Bahndrehungen sind Bahndrehimpulse, $M_{\mu\nu} = -i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$.

... Spintransformationen sind $\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4i}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$.

Es erfüllen sowohl die $M_{\mu\nu}$ als auch die $\Sigma_{\mu\nu}$ die Drehimpulsalgebra (1).

Durch Exponenzieren erhält man die endlichen Transformationen (gelangt zur Lie-Gruppe SO(3,1)); z.B.

$$S = \exp\left(\frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}\,\Sigma^{\mu\nu}\right),$$

wobei $\omega_{\mu\nu}$ Koeffizienten zu den 6 verschiedenen $\Sigma_{\mu\nu}$ (in irgendeiner Darstellung) sind. Sie charakterisieren eine konkrete Transformation.

Fasst man die $\omega_{\mu\nu}$ als Matrix auf, erhält man aus ihnen auch die endlichen Bahndrehungen:

$$\Lambda = e^{\omega}\ , \quad \text{d.h.} \quad \Lambda_{\mu\nu} = \left(e^{\omega}\right)_{\mu\nu}.$$

Endliche Lorentz-Transformation von Feldern mit...

... Spin $\frac{1}{2}$: $\quad \psi(x) \to S\,\psi(\Lambda^{-1}x)$,

... Spin 0: $\quad \phi(x) \to \phi(\Lambda^{-1}x)$,

... Spin 1: $\quad A^{\mu}(x) \to \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,A^{\nu}(\Lambda^{-1}x)$.