Der Formalismus der Speziellen Relativitätstheorie

In diesem Kapitel wird die Verwendung ko- und kontravarianter Tensorkomponenten (untere und obere Indizes) motiviert.

Rückblick auf Klassische Mechanik & Elektrodynamik

Die Formulierung der klassischen Physik geschah bereits mehr oder weniger in der Sprache der Tensoren verschiedener Ordnung.

Tensoren der Ordnung...	alternative Bezeichnung	Beispiele
0	Skalare	Masse, Ladung
1	Vektoren	Schwerpunkt, Dipolmoment
2	Matrizen	Trägheitstensor, Quadrupolmoment
⋮		
n	—	höhere Multipolmomente, Suszeptibilitätstensoren in nichtlinearer Optik, ...

Tensoren sind anhand ihres Verhaltens unter Koordinatentransformationen definiert. Ein Objekt mit n Indizes, $T_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, heißt <u>Tensor n-ter Stufe</u> (oder Ordnung), wenn es sich unter einer Koordinatentransformation (gegeben durch eine Matrix Λ) verhält wie

$$\boxed{\tilde{T}_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \Lambda_{i_1 j_1} \Lambda_{i_2 j_2} \ldots \Lambda_{i_n j_n} \, T_{j_1 j_2 \ldots j_n} \, .}$$

Das heißt: An jedem Index eines Tensors „greift" eine Transformationsmatrix an.

Für $n=1$ und $n=2$ reduziert sich die Regel auf das altbekannte Basiswechsel-Verhalten von Vektoren und Matrizen:

$$\tilde{a}_i = \Lambda_{ij}\, a_j \longrightarrow \underline{\tilde{\vec{a}} = \Lambda \cdot \vec{a}}$$

$$\tilde{A}_{ij} = \Lambda_{ik}\,\Lambda_{jl}\,A_{kl} = \Lambda_{ik}\,A_{kl}\,(\Lambda^T)_{lj}$$

$$= \Lambda_{ik}\,(A\cdot\Lambda^T)_{kj} = (\Lambda\cdot A\cdot\Lambda^T)_{ij}$$

$$\longrightarrow \underline{\tilde{A} = \Lambda\cdot A\cdot\Lambda^T} \quad .$$

Erinnerung: Matrixmultiplikation in Indexschreibweise

$$(A\cdot\vec{a})_i = A_{ij}\,a_j$$

$$(A\cdot B)_{ij} = A_{ik}\,B_{kj}$$

Bsp. Trägheitstensor

Der Trägheitstensor gibt die Rotationsenergie eines starren Körpers bei vorgegebener Winkelgeschwindigkeit,

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\, J_{ij}\,\omega_i\,\omega_j \; .$$

Unter einer Änderung des Koordinatensystems muss sich J genau so transformieren, dass die Rotationsenergie dieselbe bleibt — das ist die Tensoreigenschaft!

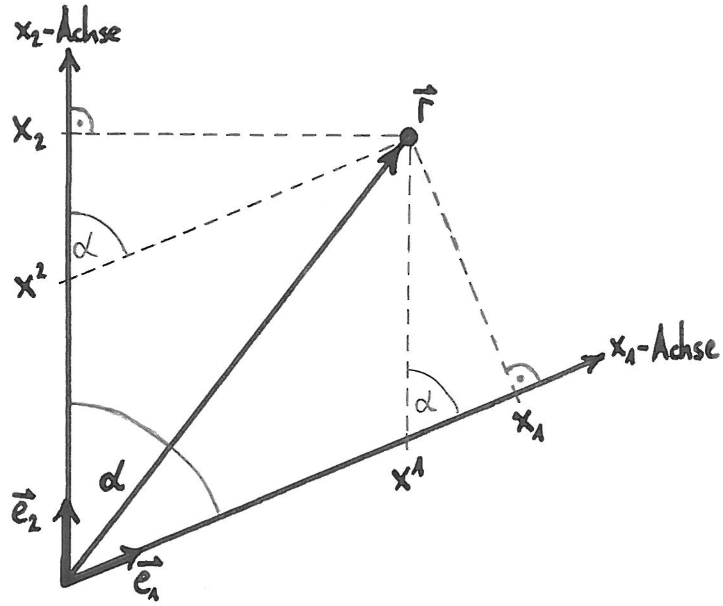
Da für Koordinatentransformationen $\Lambda^T\cdot\Lambda = \mathbb{1}$ gilt, finden wir:

$$\tilde{E}_{rot} = \frac{1}{2}\,\tilde{J}_{ij}\,\tilde{\omega}_i\,\tilde{\omega}_j = \frac{1}{2}\left(\Lambda_{ia}\,\Lambda_{jb}\,J_{ab}\right)\left(\Lambda_{ic}\,\omega_c\right)\left(\Lambda_{jd}\,\omega_d\right)$$

$$= \underbrace{\Lambda_{ia}\,\Lambda_{ic}}_{(\Lambda^T)_{ai}\,\Lambda_{ic} = (\Lambda^T\cdot\Lambda)_{ac} = \mathbb{1}_{ac} = \delta_{ac}}\;\underbrace{\Lambda_{jb}\,\Lambda_{jd}}_{(\Lambda^T)_{bj}\,\Lambda_{jd} = (\Lambda^T\cdot\Lambda)_{bd} = \mathbb{1}_{bd} = \delta_{bd}}\;\frac{1}{2}\,J_{ab}\,\omega_c\,\omega_d = \frac{1}{2}\,J_{ab}\,\omega_a\,\omega_b = E_{rot}\; .$$

Versuchen wir im Folgenden, die Welt etwas komplizierter zu beschreiben als (klassisch) nötig, indem wir ein <u>nicht-orthogonales Koordinatensystem</u> wählen.

(Ausblick: Wir werden später sehen, dass Lorentz-Transformationen uns dazu zwingen, das zu tun.)



Offenbar gibt es nun zwei Möglichkeiten, einem Vektor Koordinaten zuzuweisen:

- Fällen der Lote, „kovariante Komponenten",

  $$\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 \quad ;$$

- Parallelprojektion, „kontravariante Komponenten",

  $$\vec{r} = x^1 \vec{e}_1 + x^2 \vec{e}_2 \quad .$$

Die unterschiedlichen Positionen der Indizes sind zunächst als abkürzende Schreibweise zu verstehen, um die beiden Koordinaten-Sätze zu unterscheiden.

Da ko- und kontravariante Koordinaten dasselbe beschreiben, müssen sie ineinander überführbar sein.

lesen ab:

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x^1}{x^2} \longrightarrow x_1 = x^1 + \cos\alpha\, x^2$$

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x^2}{x^1} \longrightarrow x_2 = \cos\alpha\, x^1 + x^2$$

Demnach gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix}}_{\equiv \gamma} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{x_i = \gamma_{ij}\, x^j} \qquad (*)$$

und natürlich ist die umgekehrte Transformation durch die Inverse von γ gegeben:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \gamma^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

Die ganze Ästhetik des Transformationsverhaltens $(*)$ liegt darin, dass

(a) „über die Diagonale" summiert wird, d.h. die Summe über einen oben- und einen untenstehenden Index läuft, und

(b) die Matrix γ, bildlich gesprochen, einen oberen Index „nach unten zieht".

Um diese Eigenschaften auch in der umgekehrten Transformation zu manifestieren, müssen wir uns zusätzlich auf die Notation $(\gamma^{-1})_{ij} \equiv \gamma^{ij}$ einigen, denn dann gilt

$$\boxed{x^i = \gamma^{ij}\, x_j} \, .$$

Es wäre natürlich wünschenswert, wenn möglich, die Eigenschaft (b) auch auf die Indizes von Matrizen zu übertragen — das müsste jedoch in Konsistenz mit der eben festgesetzten Definition von γ^{ij} sein!

$$\gamma_{ij} \underset{\text{Indexziehen}}{=} \gamma_{ia}\gamma_{jb}\gamma^{ab} \underset{\text{Definition von } \gamma^{ab}}{=} \gamma_{ia}\gamma_{jb}(\gamma^{-1})_{ab} \underset{\gamma^{-1}\text{ symmetrisch}}{=} \gamma_{ia}\underbrace{\gamma_{jb}(\gamma^{-1})_{ba}}_{(\gamma\cdot\gamma^{-1})_{ja} = \delta_{ja}} = \gamma_{ij} \quad \checkmark$$

Durch Anwendung von γ ist es nun also möglich, Matrizen mit beliebig gestellten Indizes zu definieren,

$$A^{ij} = \gamma^{ia}\gamma^{jb}A_{ab}\,, \qquad A^{i}{}_{j} = \gamma^{ia}A_{aj}\,, \qquad A_{i}{}^{j} = \gamma^{ja}A_{ia}\,.$$

Im allgemeinen Fall ist (A^{ij}) nicht die Inverse der Matrix (A_{ij}) und man beachte $A^{i}{}_{j} \neq A_{j}{}^{i}$.

<u>Bsp.</u> Wir kennen bereits

$$(\gamma_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

und die Inverse ist leicht zu bestimmen,

$$(\gamma^{ij}) = \frac{1}{\sin^2\alpha}\begin{pmatrix} 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Damit: $\gamma^{i}{}_{j} = \gamma^{ia}\gamma_{aj}$

$$\gamma^{1}{}_{1} = \gamma^{1a}\gamma_{a1} = \gamma^{11}\gamma_{11} + \gamma^{12}\gamma_{21} = \frac{1}{\sin^2\alpha}(1-\cos^2\alpha) = 1$$

$$\gamma^{1}{}_{2} = \gamma^{1a}\gamma_{a2} = \gamma^{11}\gamma_{12} + \gamma^{12}\gamma_{22} = \frac{1}{\sin^2\alpha}(\cos\alpha - \cos\alpha) = 0$$

$$\gamma^{2}{}_{1} = \gamma^{2a}\gamma_{a1} = \gamma^{21}\gamma_{11} + \gamma^{22}\gamma_{21} = \frac{1}{\sin^2\alpha}(-\cos\alpha + \cos\alpha) = 0$$

$$\gamma^{2}{}_{2} = \gamma^{2a}\gamma_{a2} = \gamma^{21}\gamma_{12} + \gamma^{22}\gamma_{22} = \frac{1}{\sin^2\alpha}(-\cos^2\alpha + 1) = 1$$

$$\longrightarrow \underline{\underline{\gamma^{i}{}_{j} = \delta^{i}_{j}}} \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{\gamma^{i}{}_{j} = \gamma_{j}{}^{i} \equiv \gamma^{i}_{j}}$$

Alternativ: $\gamma^i{}_j = \gamma^{ia}\gamma_{aj} \Rightarrow (\gamma^i{}_j) = (\gamma^{ij})\cdot(\gamma_{ij}) = \mathbb{1}$

(Matrixmultiplikation)

$$(\gamma^i_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Bsp.</u> Für die verschiedenen Indexstellungen der allgemeinen Matrix

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

findet man

$$(A^i{}_j) = \frac{1}{\sin^2\alpha}\begin{pmatrix} a - c\cos\alpha & b - d\cos\alpha \\ c - a\cos\alpha & d - b\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$(A_i{}^j) = \frac{1}{\sin^2\alpha}\begin{pmatrix} a - b\cos\alpha & b - a\cos\alpha \\ c - d\cos\alpha & d - c\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$(A^{ij}) = \frac{1}{\sin^4\alpha}\begin{pmatrix} a-(b+c)\cos\alpha + d\cos^2\alpha & b-(a+d)\cos\alpha + c\cos^2\alpha \\ c-(a+d)\cos\alpha + b\cos^2\alpha & d-(b+c)\cos\alpha + a\cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ alle vier Matrizen identisch sind.

<u>Bem.</u>

- In den obigen Matrixdarstellungen gibt konventionsgemäß der erste Index die Zeile, der zweite die Spalte an. Für symmetrische Matrizen $S_{ij} = S_{ji}$ entfällt zwar die Unterscheidung zwischen $S^i{}_j$ und $S_j{}^i$, da

$$S^i{}_j = \gamma^{ia}S_{aj} = \gamma^{ia}S_{ja} = S_j{}^i,$$

jedoch gilt für die zugehörigen Matrizen

$$(S^i{}_j) = (S_j{}^i)^T.$$

- Die Berechnung der $A^i{}_j$, $A_j{}^i$ und A^{ij} lässt sich bequem als Matrixmultiplikation ausführen; für Tensoren höherer Ordnung geht das natürlich nicht.

Schlussfolgerung No. 1:

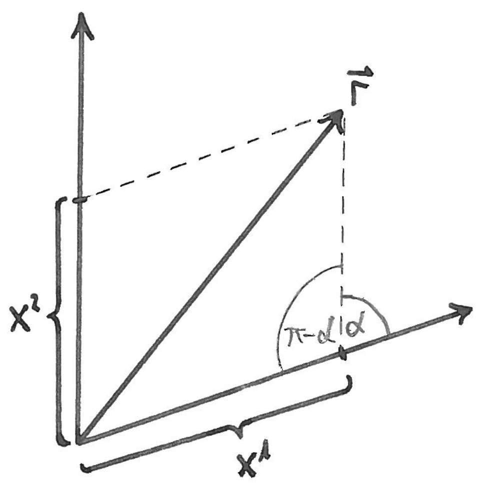
(a) Es genügt nicht, von Tensoren n-ter Stufe zu sprechen. Stattdessen muss zusätzlich zwischen ko- und kontravarianten Komponenten unterschieden werden:

$$\boxed{T^{i_1 .. i_m}{}_{j_1 .. j_n} \text{ ist ein } (m,n)\text{-Tensor.}}$$

(b) Durch Kontraktion mit der das Koordinatensystem charakterisierenden Matrix γ können ko- und kontravariante Indizes ineinander umgewandelt werden.

Widmen wir uns nun einer weiteren offenen Frage im nicht-orthogonalen Koordinatensystem: Bezüglich welcher Komponenten ist das Skalarprodukt zweier Vektoren zu definieren?

Wir setzen bei der Forderung an, dass das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst das Quadrat seiner Länge ergeben soll, $(\vec{r},\vec{r}) = |\vec{r}|^2$.



lesen ab (Kosinussatz):

$$
\begin{aligned}
|\vec{r}|^2 &= (x^1)^2 + (x^2)^2 - 2x^1x^2\cos(\pi-\alpha) \\
&= x^1x^1 + x^2x^2 + 2x^1x^2\cos\alpha \\
&= x^1(x_1 - \cancel{x^2\cos\alpha}) + x^2(x_2 - \cancel{x^1\cos\alpha}) + \cancel{2x^1x^2\cos\alpha} \\
&= \underline{x^1x_1 + x^2x_2}
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$ Das Skalarprodukt ist die Summe über die Produkte beider Komponenten.

im Allgemeinen: $\boxed{(\vec{a},\vec{b}) = a^i b_i = a_i b^i = \gamma_{ij}\, a^i b^j}$

<u>Bem.</u> Für eine konsistente Matrixmultiplikation im Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sollte ein Vektor in der kontravarianten Basis mit dem Transponierten identifiziert werden, da

$$(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}^T \cdot \vec{b} \qquad (\text{für } \alpha = \tfrac{\pi}{2}).$$

Unter Koordinatentransformationen Λ, die den Winkel zwischen den Koordinatenachsen unverändert lassen — d.h. für die gilt $\Lambda^k{}_i \Lambda^l{}_j \gamma_{kl} = \gamma_{ij}$ —, ist das Skalarprodukt invariant:

$$(\Lambda\vec{a}, \Lambda\vec{b}) = \gamma_{kl}(\Lambda^k{}_i a^i)(\Lambda^l{}_j b^j) = \underbrace{\Lambda^k{}_i \Lambda^l{}_j \gamma_{kl}}_{\gamma_{ij}} a^i b^j = (\vec{a},\vec{b}).$$

<u>Schlussfolgerung No. 2:</u>

> Die Matrix γ definiert das Skalarprodukt, da es ko- und kontravariante Komponenten vermengt.

Bem. Der Grund dafür, dass klassisch bisher nie zwischen den Komponenten unterschieden werden musste, liegt etwas tiefer.

Man betrachte den d-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^d$ zunächst nur als Punktraum. Dann führen wir Vektoren ein als Elemente des zugehörigen Tangentialraumes $T_p(\mathbb{R}^d)$ an einem Punkt $p \in \mathbb{R}^d$; es ist

$$T_p(\mathbb{R}^d) := \{\text{Richtungsableitungen entlang Kurven durch } p \in \mathbb{R}^d\}.$$

Da alle Punkte des $\mathbb{R}^d$ identisch sind, sieht der Tangentialraum überall gleich aus und wir können auf den Index p verzichten. Ein typisches Element von $T(\mathbb{R}^d)$ ist die Richtungsableitung „entlang $\vec{\lambda}$": $\vec{\lambda}\,\mathrm{grad} = \lambda^i \partial_i$. Es ist klar, dass die Ableitungen entlang der Koordinatenachsen, ∂_i, als Basisvektoren gewählt werden können.

Bezeichnung: $\partial_i \equiv \vec{e}_i \longrightarrow \vec{r} = x^i \vec{e}_i \in T(\mathbb{R}^d)$

Das heißt, mit den kontravarianten Komponenten eines Vektors sind die Koeffizienten bezüglich der Basis des Tangentialraumes gemeint!

Als weiteres Konstrukt führt man den sogenannten Dualraum bzw. Kotangentialraum $T^*(\mathbb{R}^d)$ ein,

$$T^*(\mathbb{R}^d) := \{\text{Abbildungen von } T(\mathbb{R}^d) \text{ nach } \mathbb{R}\}.$$

Tatsächlich können hier die Koordinatendifferentiale dx^i als Basis verwendet werden, wobei die Abbildung nach $\mathbb{R}$ gemäß $dx^i(\lambda^j \partial_j) := \lambda^i$ erfolgt.

Bezeichnung: $dx^i \equiv \vec{e}^{\,i} \longrightarrow \vec{r} = x_i \vec{e}^{\,i} \in T^*(\mathbb{R}^d)$

Das heißt, <u>mit den kovarianten Komponenten sind die Koeffizienten bezüglich der Basis des Dualraumes gemeint!</u>

Man beachte, dass die Anwendung eines Elements des Dualraumes, $\vec{a} = a_i\, dx^i$, auf ein Element des Tangentialraumes, $\vec{b} = b^i \partial_i$, gerade das Skalarprodukt liefert:

$$a_i\, dx^i (b^j \partial_j) = a_i b^i .$$

(Vergleiche: Skalarprodukt in der Quantenmechanik als Anwendung eines Bra- auf einen Ket-Vektor.)

Da im Falle des $\mathbb{R}^d$ Tangential- und Dualraum gleich aussehen, wird deren Unterscheidung in der klassischen Physik selten relevant; im hier behandelten Beispiel wurde sie durch eine ungeschickte Wahl der Basisvektoren notwendig.

Aufbau der Speziellen Relativitätstheorie

Die bisherigen Betrachtungen zum Formalismus der ko- und kontravarianten Indizes waren rein geometrischer Natur; jetzt erst kommt die Physik ins Spiel.

Grundidee der Speziellen Relativitätstheorie ist, die Zeit selbst als eine zusätzliche Koordinate in die geometrische Beschreibung aufzunehmen, anstatt sie als einen unabhängigen Parameter zu behandeln.

Vektoren: $\underline{x} \in \mathbb{R}^{3,1}$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$ bzw. $\underline{x} = (x^\mu)$ mit $\mu = 0,1,2,3$

Anhand des Skalarproduktes zweier solcher Vierervektoren wird die Metrik η definiert (Analogon zur Matrix γ im vorherigen Abschnitt):

$$\boxed{(\underline{x}, \underline{y}) = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \qquad \text{mit} \quad \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)\ .}$$

Das negative Vorzeichen in der 00-Komponente der Metrik verhindert, dass sich die Zeit x^0 einfach wie eine weitere Raumrichtung verhält – im Grunde steckt die gesamte Relativistik in diesem Vorzeichen!

1. zur Metrik:

Wir haben soeben definiert $(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wie im Falle von γ wollen wir $(\eta^{\mu\nu})$ als die inverse Matrix dazu definieren, also:

$$\eta^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} := \delta^\mu_\nu\ .$$

Man sieht sofort, dass $(\eta_{\mu\nu})$ selbstinvers ist, also: $(\eta_{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu})$.

Des Weiteren gilt: $\eta^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\alpha}\eta_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$, das heißt, die Matrixdarstellung von $\eta^\mu{}_\nu = \eta_\mu{}^\nu \equiv \eta^\mu_\nu$ ist die Einheitsmatrix.

2. zu Koordinatentransformationen:

Koordinatentransformationen können nur dann als physikalisch sinnvoll erachtet werden, wenn sie die Metrik unverändert lassen,

$$\boxed{\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma\ \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma}\ .}$$

Das sind gerade die <u>Lorentz-Transformationen.</u> Sie lassen insbesondere das Skalarprodukt zweier Vektoren invariant:

$$(\Lambda \underline{x}, \Lambda \underline{y}) = (\Lambda^\mu{}_\rho x^\rho)(\Lambda^\nu{}_\sigma x^\sigma)\, \eta_{\mu\nu} = \underbrace{\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \eta_{\mu\nu}}_{\eta_{\rho\sigma}} x^\rho x^\sigma$$
$$= (\underline{x}, \underline{y}) \, .$$

Die obengenannte Bedingung an die Lorentz-Transformationen impliziert außerdem deren Umkehrbarkeit:

$$\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \, \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \qquad \big| \cdot \eta^{\rho\alpha} \quad \text{(Summe über } \rho)$$

$$\underbrace{\eta^{\rho\alpha} \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho}_{\Lambda_\nu{}^\alpha} \Lambda^\nu{}_\sigma = \underbrace{\eta_{\rho\sigma} \eta^{\rho\alpha}}_{\delta^\alpha_\sigma} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\Lambda_\nu{}^\alpha \Lambda^\nu{}_\sigma = \delta^\alpha_\sigma}$$

bzw. $(\Lambda^T)^\alpha{}_\nu \Lambda^\nu{}_\sigma = \delta^\alpha_\sigma$, also $\Lambda^T \Lambda = \mathbb{1}$.

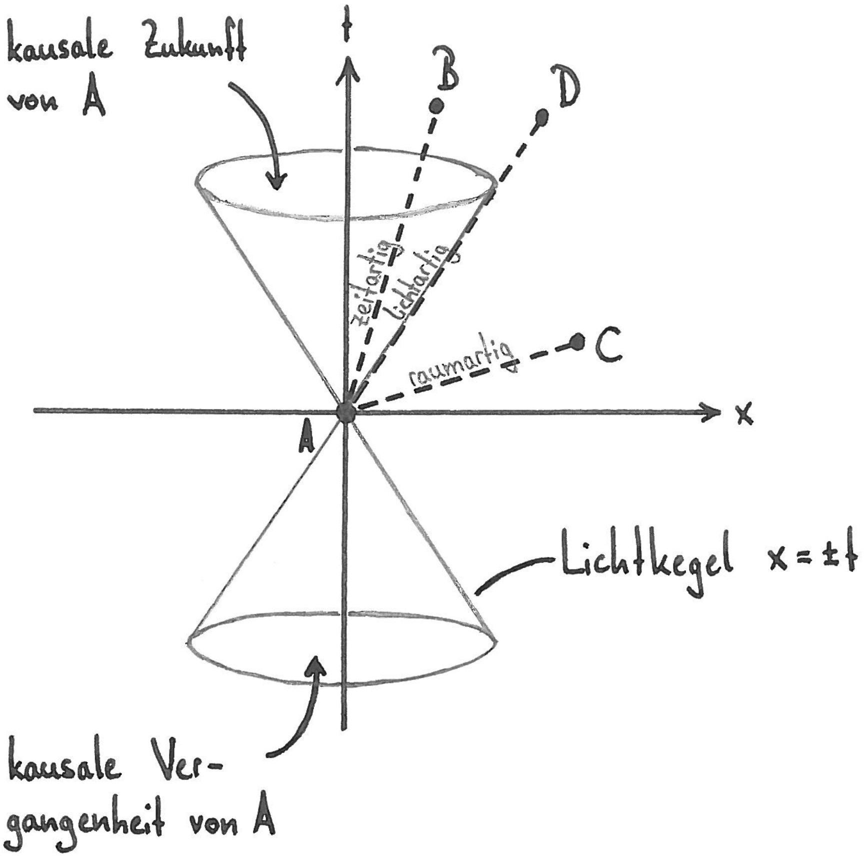
3. zur Abstandsmessung:

Da das Produkt $(\underline{x}, \underline{y}) = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ nicht positiv definit ist, bezeichnet man es als <u>pseudo-Skalarprodukt.</u> Das hat dramatische Konsequenzen für den Begriff des Abstandes zweier Punkte im Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{3,1}$:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = -(x^0 - y^0)^2 + (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2$$

- $d(\underline{x}, \underline{y})^2 < 0$: Die Punkte $\underline{x}$ und $\underline{y}$ sind <u>zeitartig</u> getrennt;
- $d(\underline{x}, \underline{y})^2 > 0$: Die Punkte $\underline{x}$ und $\underline{y}$ sind <u>raumartig</u> getrennt;
- $d(\underline{x}, \underline{y})^2 = 0$: Die Punkte $\underline{x}$ und $\underline{y}$ sind <u>lichtartig</u> getrennt.

Verbildlichung im Lorentz-Diagramm:



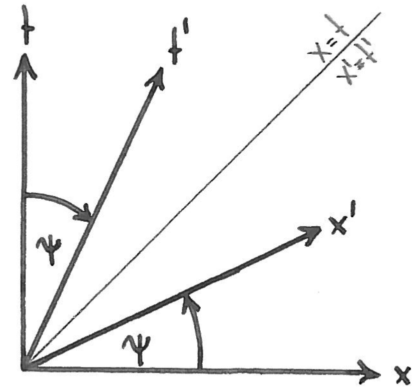
In der Sprache der Symmetrien ist der Übergang von der klassischen Physik hin zur Speziellen Relativitätstheorie ein Übergang von der Gruppe der Galilei-Transformationen $iSO(4)$, welche Rotationen, Translationen, Relativbewegungen und Verschiebungen des Zeitnullpunktes umfasst, zur Gruppe der Poincaré-Transformationen $iO(3,1)$, welche Rotationen, Relativbewegungen und Raum-Zeit-Translationen umfasst.

Die Rotationen und Relativbewegungen bilden die Untergruppe der Lorentz-Transformationen:

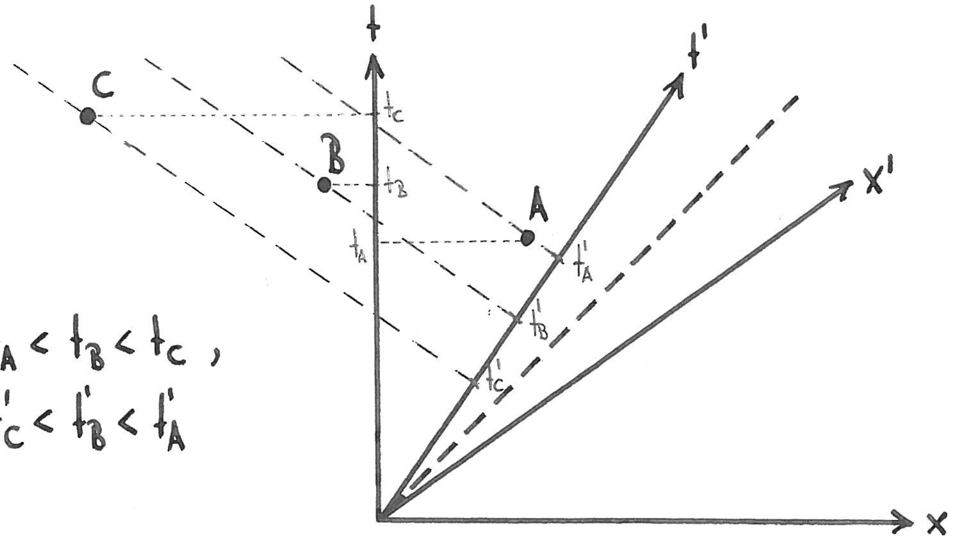
$$O(3,1) := \left\{ \Lambda \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{R}) \mid \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \,,\ \eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1) \right\}.$$

Es stellt sich heraus, dass Lorentz-Transformationen eine Verkippung der Koordinatenachsen im Lorentz-Diagramm bewirken.

Die Lage des Lichtkegels bleibt dabei unverändert.



Bsp. Ein Beobachter im Koordinatensystem (x,t) sieht drei Ereignisse in der Reihenfolge ABC. Es ist möglich, dass ein zweiter Beobachter in seinem Inertialsystem (x',t') die Ereignisse in der umgedrehten Reihenfolge CBA sieht.



$t_A < t_B < t_C$,

$t'_C < t'_B < t'_A$

Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Ziel ist es nun, relevante Größen der klassischen Physik durch Lorentz-kovariante Ausdrücke zu ersetzen, also solche, die das richtige Transformationsverhalten unter Lorentz-Transformationen aufweisen.

Zusammenfassung zu Vierervektoren: $(\mu = 0,1,2,3\ ;\ x \in \mathbb{R}^{3,1})$

$$\left.\begin{array}{l}\text{skalares Potential } \phi(\vec{r},t) \\ \text{Vektorpotential } \vec{A}(\vec{r},t)\end{array}\right\} \quad \underline{\text{Vektorpotential } A^\mu(x)} \qquad (A^\mu) = (\phi, A_x, A_y, A_z)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ladungsdichte } \varrho(\vec{r},t) \\ \text{Stromdichte } \vec{j}(\vec{r},t)\end{array}\right\} \quad \underline{\text{Viererstromdichte } j^\mu(x)} \qquad (j^\mu) = (\varrho, j_x, j_y, j_z)$$

__Bem.__ Nicht vergessen, dass $A^\mu \neq A_\mu$!

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu \longrightarrow (A_\mu) = (-\phi, A_x, A_y, A_z)$$

$$j_\mu = \eta_{\mu\nu} j^\nu \longrightarrow (j_\mu) = (-\varrho, j_x, j_y, j_z)$$

In der Viererandnotation nehmen viele Gleichungen eine elegantere Form an.

Kontinuitätsgleichung: $\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r},t) + \partial_t \varrho(\vec{r},t) = 0$

$$\longrightarrow \boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$$

Lorenz-Eichung: $\quad \operatorname{div} A(\vec{r},t) + \partial_t \phi(\vec{r},t) = 0$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\partial_\mu A^\mu = 0}$$

Wellengleichung: $\quad \Box \vec{A}(\vec{r},t) \equiv (\Delta - \partial_t^2)\vec{A}(\vec{r},t) = -4\pi \vec{j}(\vec{r},t)$

und $\quad \Box \phi(\vec{r},t) = -4\pi \varrho(\vec{r},t)$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = -4\pi j^\nu}$$

Der Feldstärke-Tensor ist definiert als

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}$$

und kann durch die elektrischen und magnetischen Feldkomponenten ausgedrückt werden (beachte: Abhängigkeit in der Vorzeichenkonvention von $\eta_{\mu\nu}$!):

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

__Bsp.__ Berechnung von $(F^\mu{}_\nu)$, $(F_\mu{}^\nu)$ und $(F^{\mu\nu})$

$$F^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} \longrightarrow (F^\mu{}_\nu) = (\eta^{\mu\nu}) \cdot (F_{\mu\nu})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_\mu{}^\nu = \eta^{\nu\alpha} F_{\mu\alpha} \longrightarrow (F_\mu{}^\nu) = (F_{\mu\nu}) \cdot (\eta^{\mu\nu})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \longrightarrow (F^{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu}) \cdot (F_{\mu\nu}) \cdot (\eta^{\mu\nu})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Maxwell-Gleichungen schließlich lauten in Lorenz-Eichung:

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= 4\pi j^\nu , \\ \partial_{(\rho} F_{\mu\nu)} &= 0 . \end{aligned}}$$

<u>Bsp.</u> Sind die Maxwell-Gleichungen wirklich invariant unter Lorentz-Transformationen?

$$\partial'_\mu F'^{\mu\nu} = 4\pi j'^\nu$$

$$(\Lambda_\mu{}^\rho \partial_\rho)(\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}) = 4\pi \Lambda^\nu{}_\gamma j^\gamma$$

$$\underbrace{\Lambda_\mu{}^\rho \Lambda^\mu{}_\alpha}_{(\Lambda^T \cdot \Lambda)^\rho_\alpha = \delta^\rho_\alpha} \Lambda^\nu{}_\beta \partial_\rho F^{\alpha\beta} = 4\pi \Lambda^\nu{}_\gamma j^\gamma \qquad | \cdot \Lambda_\nu{}^\kappa$$

$$\delta^\rho_\alpha \underbrace{\Lambda_\nu{}^\kappa \Lambda^\nu{}_\beta}_{\delta^\kappa_\beta} \partial_\rho F^{\alpha\beta} = 4\pi \underbrace{\Lambda_\nu{}^\kappa \Lambda^\nu{}_\gamma}_{\delta^\kappa_\gamma} j^\gamma$$

$$\partial_\varrho F^{\varrho\kappa} = 4\pi \, j^\kappa \qquad \checkmark$$

Die Maxwell-Gleichungen folgen aus der Lagrange-Dichte

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\nu)(\partial_\mu A^\nu) + \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 .}$$