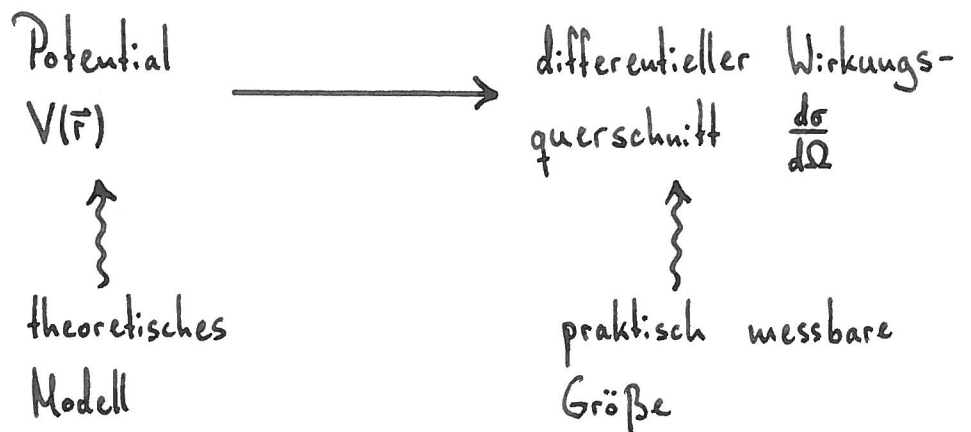


Zusammenfassung Potentialstreuung

Motivation: Um Aufschluss über die Struktur bzw. Zusammensetzung einer Sache zu erhalten, „bewerten“ wir sie mit irgendetwas und schauen uns an, was zurückkommt.

Grundaufgabe:



- Annahmen:
1. ruhendes Target (kein Rückstoß)
 2. kein Energieverlust (bspw. an innere Freiheitsgrade des Targets)

Der differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ gibt das Verhältnis des nach der Streuung am Target durch einen Raumwinkel $d\Omega$ passierenden Teilchenflusses zum einlaufenden Teilchenfluss (pro Einheitsfläche).

Damit gibt $\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$ die Querschnittsfläche derjenigen einfallenden Teilchen, die überhaupt gestreut werden.

Wir zerlegen die Wellenfunktion $\psi_k(\vec{r})$ in einen einlaufenden und einen gestreuten Anteil,

$$\psi_k(\vec{r}) = \psi_{in}(\vec{r}) + \psi_{sc}(\vec{r}),$$

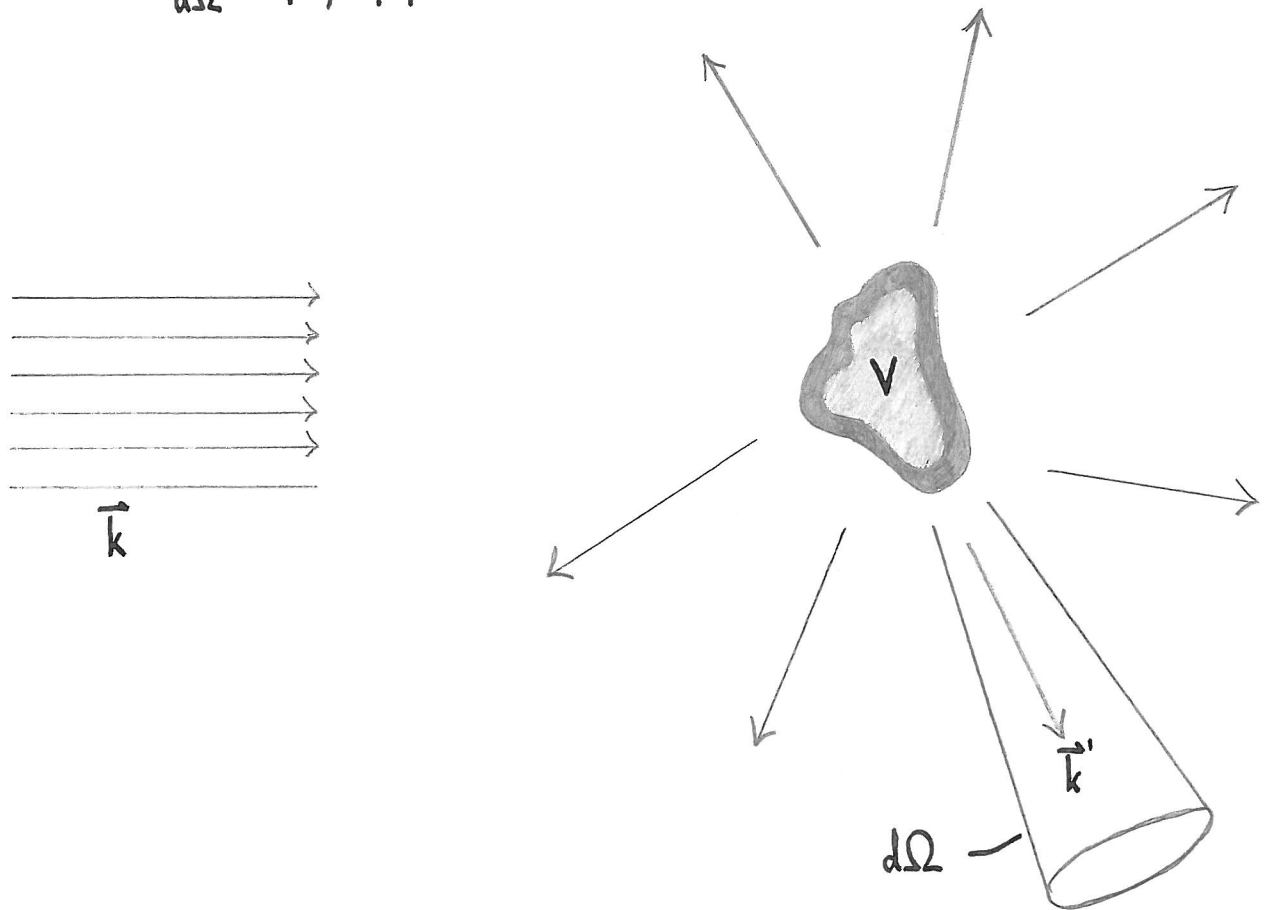
wobei:

$$\psi_{\text{in}}(\vec{r}) = e^{ikz} \quad (\text{freie Teilchen, nicht normiert}),$$

$$\psi_{\text{sc}}(\vec{r}) = f(\vartheta, \varphi) \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \quad (\text{radialer Teilchenstrom}).$$

Hierbei ist $f(\vartheta, \varphi)$ die winkelabhängige Streuamplitude und es gilt (hier als Definition, ohne Begründung)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} := |f(\vartheta, \varphi)|^2.$$



Es existieren zwei prominente Methoden zur Bestimmung des Wirkungsquerschnitts:

1. Born'sche Näherung,
2. Analyse der Streuphasen.

Ausgangspunkt ist wie immer die Schrödinger-Gleichung,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r})\right) \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = E_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad E_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

in leicht anderer Form:

$$(\Delta + k^2) \psi_k(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}) \psi_k(\vec{r})$$

Bem. Sei $z \equiv -k^2$. Auf der LHS steht der Operator $\Delta - z \cdot \mathbb{1}$, angewandt auf $\psi_k(\vec{r})$. Alle z , für die „das nicht Null wird“, bilden die Resolventenmenge,

$$\rho(\Delta) = \{z \in \mathbb{C} \mid (\Delta - z \cdot \mathbb{1}) \text{ bijektiv mit stetiger Inversen}\}.$$

Wir sind aber gerade am Spektrum interessiert,¹

$$\sigma(\Delta) = \mathbb{C} \setminus \rho(\Delta),$$

können den Operator also nicht „einfach“ invertieren.

Wir bedienen uns der Methode der Green'schen Funktion:

$$(\Delta + k^2) G(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (1)$$

→ Fourier-Transformation: $\tilde{G}(\vec{q}) = \int d\vec{r} e^{-i\vec{q}\vec{r}} G(\vec{r}),$

$$G(\vec{r}) = \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{r}} \tilde{G}(\vec{q})$$

→ Gl. (1): $(-q^2 + k^2) \tilde{G}(\vec{q}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{G}(\vec{q}) = -\frac{1}{q^2 - k^2}$

→ Rücktransformation: $G(\vec{r}) = - \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\vec{r}}}{q^2 - k^2},$ singularär bei $q = \pm k!$

1: Die Menge $\sigma(\Delta)$ hat nichts mit dem Wirkungsquerschnitt zu tun.

Um nicht in die Singularität zu fallen, kann man den Nenner etwas von der reellen Achse wegschieben,

$$G_{\pm}(\vec{r}) = - \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}\vec{r}}}{q^2 - k^2 \mp i\epsilon},$$

wobei sich herausstellt, dass das obere (untere) Vorzeichen die radial auslaufende (einlaufende) Welle liefert. Das Integral kann mit Hilfe des Residuen-Kalküls gelöst werden — siehe bspw. D. Tong: „Applications of Quantum Mechanics“ — und man erhält

$$G_{+}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}.$$

$$\Rightarrow \Psi_k(\vec{r}) = \Psi_{in}(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3r' G_{+}(\vec{r}-\vec{r}') V(\vec{r}') \Psi_k(\vec{r}') \quad (2)$$

wit $\Psi_{in}(\vec{r}) = e^{ikz}$,

$$G_{+}(\vec{r}-\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Das ist eine implizite Integralgleichung für $\Psi_k(\vec{r})$, die sogenannte Lippmann-Schwinger-Gleichung (äquivalent zur Schrödinger-Gleichung).

Bem. Der zweite Summand in (2) kann auch als Anwendung eines Integraloperators G_V auf $\Psi_k(\vec{r})$ aufgefasst werden,

$$\Psi_k(\vec{r}) = \Psi_{in}(\vec{r}) + G_V \Psi_k(\vec{r}),$$

sodass $\Psi_k(\vec{r}) = (1 - G_V)^{-1} \Psi_{in}(\vec{r})$.

Gleichung (2) stellt eine Faltung von $V(\vec{r}) \psi_k(\vec{r})$ mit $G_+(\vec{r})$ dar, die unter Fourier-Transformation in eine Multiplikation übergehen sollte, sodass:

$$\tilde{\Psi}_k(\vec{q}) = \tilde{\Psi}_{in}(\vec{q}) + \tilde{G}(\vec{q}) \tilde{V}(\vec{q}) \tilde{\Psi}_k(\vec{q}).$$

Aber: \tilde{G} ist jetzt als Operator aufzufassen, $\tilde{G}(\vec{q}) = -\frac{1}{q^2 - k^2}$
mit $q^2 = \frac{p^2}{\hbar^2}$ und p dem Impulsoperator.

In dieser Variante erhalten wir die Lippmann-Schwinger-Gleichung in Bra-Ket-Schreibweise:

$$|\psi_k\rangle = |\vec{k}\rangle + \frac{2m}{\hbar^2} \tilde{G} \tilde{V} |\psi_k\rangle,$$

mit
$$\tilde{G} = \frac{1}{k^2 - p^2/\hbar^2}, \quad \langle \vec{r} | \tilde{G} | \vec{r}' \rangle = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \psi_k(\vec{r}) &= \langle \vec{r} | \psi_k \rangle = \langle \vec{r} | \vec{k} \rangle + \frac{2m}{\hbar^2} \langle \vec{r} | \tilde{G} \tilde{V} | \psi_k \rangle \\ &= e^{i\vec{k}\vec{r}} + \frac{2m}{\hbar^2} \int d\vec{r}' \int d\vec{r}'' \underbrace{\langle \vec{r} | \tilde{G} | \vec{r}' \rangle}_{G_+(\vec{r}-\vec{r}')} \underbrace{\langle \vec{r}' | \tilde{V} | \vec{r}'' \rangle}_{\psi_k(\vec{r}'')} \end{aligned}$$

← lokale Potentiale:
$$\begin{aligned} \langle \vec{r}' | \tilde{V} | \vec{r}'' \rangle &= V(\vec{r}', \vec{r}'') \\ &= \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}'') V(\vec{r}') \end{aligned}$$

$$= e^{i\vec{k}\vec{r}} + \frac{2m}{\hbar^2} \int d\vec{r}' G_+(\vec{r}-\vec{r}') V(\vec{r}') \psi_k(\vec{r}') \quad \checkmark$$

Die Born'sche Reihe

Gleichung (2) kann iterativ aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} \Psi_k(\vec{r}) &= \Psi_{in}(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3\vec{r}' G_+(\vec{r}-\vec{r}') V(\vec{r}') \Psi_{in}(\vec{r}') \\ &\quad + \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^2 \int d^3\vec{r}' \int d^3\vec{r}'' G_+(\vec{r}-\vec{r}') V(\vec{r}') G_+(\vec{r}'-\vec{r}'') V(\vec{r}'') \Psi_{in}(\vec{r}'') \\ &\quad + \dots \\ &\quad \text{(symbolisch)} \\ &= \Psi_{in} + \int G_+ V \Psi_{in} + \iint G_+ V G_+ V \Psi_{in} + \iiint G_+ V G_+ V G_+ V \Psi_{in} + \dots \end{aligned}$$

Diese Entwicklung stellt eine Störungsrechnung dar und kann diagrammatisch skizziert werden.

$$f(\vec{p}, \vec{q}) = \begin{array}{c} \text{[Diagram 1: } V(\vec{r}') \text{ box above } \vec{k} \text{ and } \vec{k}' \text{ lines]} \\ + \text{[Diagram 2: } V(\vec{r}') \text{ and } V(\vec{r}'') \text{ boxes above } \vec{k} \text{ and } \vec{k}' \text{ lines, } G(\vec{r}'-\vec{r}'') \text{ box between them]} \\ + \text{[Diagram 3: } V(\vec{r}'''), V(\vec{r}'''), V(\vec{r}''') \text{ boxes above } \vec{k} \text{ and } \vec{k}' \text{ lines, } G(\vec{r}''-\vec{r}'''), G(\vec{r}''-\vec{r}''') \text{ boxes between them]} \\ + \dots \end{array}$$

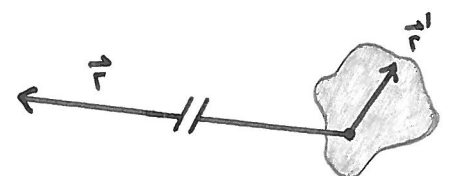
Bem. Diese Darstellung ist in Analogie zu den berühmten Feynman-Diagrammen der Quantenfeldtheorie.

Wir sind speziell am Verhalten der 1. Störungsordnung im Asymptotischen interessiert, also $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$.

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\beta}$$

$$= r \sqrt{1 - \frac{2r'}{r} \cos\beta + \frac{r'^2}{r^2}} \approx r \sqrt{1 - \frac{2r'}{r} \cos\beta} \approx r \left(1 - \frac{r'}{r} \cos\beta\right)$$

$$= r - r' \cos\beta = r - \vec{r}' \cdot \vec{e}_r$$



$$\Rightarrow G_+(\vec{r}-\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik(r-r'\cos\vartheta)}}{r}$$

$$\Rightarrow \psi_k(\vec{r}) \approx \psi_{in}(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3\vec{r}' e^{-ikr'\cos\vartheta} V(\vec{r}') \psi_{in}(\vec{r}')$$

\uparrow
 $e^{-i\vec{k}_{out} \cdot \vec{r}'}$

\uparrow
 $e^{i\vec{k}_{in} \cdot \vec{r}'}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(\vartheta, \varphi) \approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\vec{r}' e^{-i\vec{q} \cdot \vec{r}'} V(\vec{r}')}}, \quad \vec{q} \equiv \vec{k}_{out} - \vec{k}_{in}$$

$$= k(\vec{e}_r(\vartheta, \varphi) - \vec{e}_z)$$

(gleiche Beträge wg. Energieerhaltung) \rightarrow

Das heißt: In Born'scher Näherung ist die Streuamplitude gleich der Fourier-Transformation des Potentials!
 \rightarrow vgl. Fernfeld-Näherung in der Optik

Die Streuphasenanalyse

Für kugelsymmetrische Potentiale gilt $f(\vartheta, \varphi) = f(\vartheta)$ und man kann zu Legendre-Polynomen übergehen:

$$\psi_{in}(\vec{r}) = e^{ikr\cos\vartheta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\vartheta),$$

$$f(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos\vartheta),$$

mit den sphärischen Bessel-Funktionen j_l und noch zu bestimmenden Entwicklungskoeffizienten A_l .

Damit wird:

$$\begin{aligned}\psi_k(\vec{r}) &= \psi_{in}(\vec{r}) + \psi_{sc}(\vec{r}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(i^l (2l+1) j_l(kr) + A_l \frac{e^{ikr}}{r} \right) P_l(\cos\vartheta).\end{aligned}$$

Eine asymptotische Analyse der Besselfunktion ergibt

$$j_l(kr) \approx \frac{\sin(kr - l\frac{\pi}{2})}{kr} \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

$$\Rightarrow \psi_k(\vec{r}) \approx \sum_{l=0}^{\infty} \left(i^l (2l+1) \frac{\sin(kr - l\frac{\pi}{2})}{kr} + A_l \frac{e^{ikr}}{r} \right) P_l(\cos\vartheta) \quad (3)$$

Andererseits muss $\psi_k(\vec{r})$ auch ohne vorherige Zerlegung in ψ_{in} und ψ_{sc} nach Legendre-Polynomen entwickelbar sein,

$$\psi_k(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l g_l(kr) P_l(\cos\vartheta),$$

wobei die unbekannteren Funktionen $g_l(kr)$ das radiale Verhalten beschreiben. Für $r \rightarrow \infty$ (verschwindendes Potential) müssen sie sich ähnlich den Bessel-Funktionen verhalten,

$$g_l(kr) \approx \frac{\sin(kr - \lambda_l)}{kr}.$$

Zur besseren Vergleichbarkeit setzen wir $\lambda_l \equiv l\frac{\pi}{2} - \delta_l$.

$$\Rightarrow \psi_k(\vec{r}) \approx \sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{\sin(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l)}{kr} P_l(\cos\vartheta)$$

Ohne ein Potential wäre $A_l \equiv 0$, $\delta_l \equiv 0$, sodass $B_l = i^l (2l+1)$. Vergleich mit (3) führt schließlich auf

$$f(\mu) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) P_l(\cos\mu). \quad (4)$$

Das Vorgehen ist nun das folgende: Man schreibe für ein gegebenes Potential die Schrödinger-Gleichung auf und bringe $\Psi_k(\vec{r})$ auf die Form

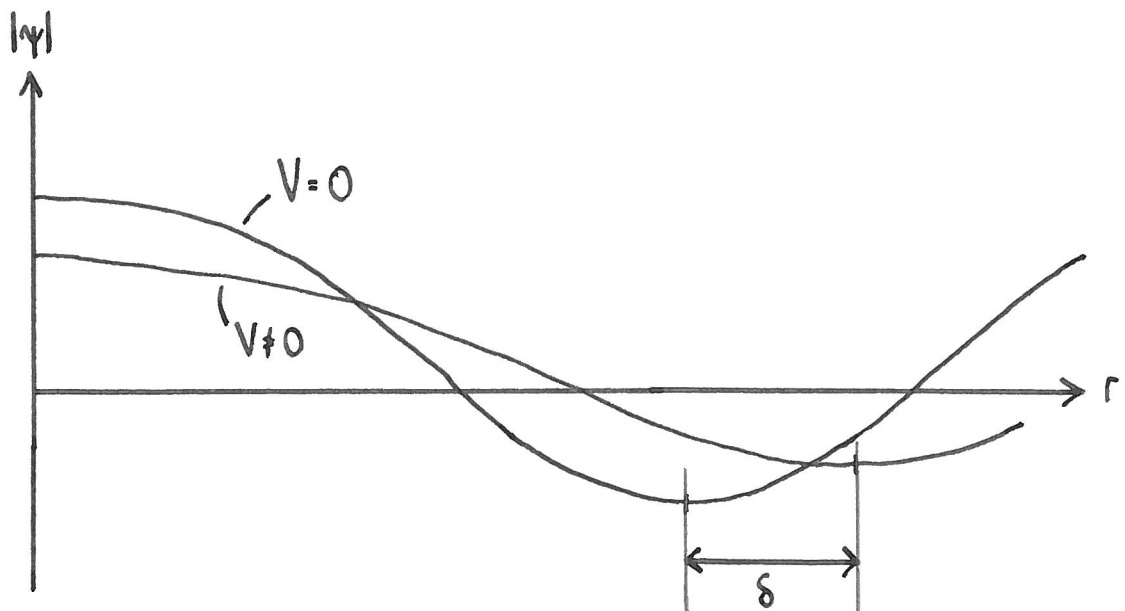
$$\Psi_k(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{\sin(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l)}{kr} P_l(\cos\mu).$$

Man lese darin die Streuphasen δ_l ab und bestimme mit Hilfe von Gl. (4) die Streuamplitude.

Durch Einsetzen von (4) in $\sigma = \int d\Omega |f(\mu)|^2$ erhält man auf direktem Wege das optische Theorem,

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} f(0).$$

Bem. anschauliche Bedeutung der Streuphasen



Beispiel: Streuung an der harten Kugel

Wir betrachten das Potential

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \infty, & 0 \leq r \leq R \\ 0, & r > R \end{cases},$$

das offenbar kugelsymmetrisch ist, sodass eine Analyse der Streuphasen möglich sein könnte.

Vorbetrachtung #1:

Ob der Kugelsymmetrie sollte der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße sein, sodass wir eine weitere Quantenzahl l einführen haben.

Für den Laplace-Operator können wir schreiben

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) - \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2 r^2}.$$

(Um das zu zeigen, transformiere $L_x = -i\hbar (y \partial_z - z \partial_y)$, $L_y = -i\hbar (z \partial_x - x \partial_z)$, $L_z = -i\hbar (x \partial_y - y \partial_x)$ in Kugelkoordinaten und vergleiche mit Δ in Kugelkoordinaten.)

Damit lautet die Schrödinger-Gleichung:

$$H \psi_{kl}(r) = E_k \psi_{kl}(r)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \psi_{kl}(r)) + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} \psi_{kl}(r) + V(r) \psi_{kl}(r) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi_{kl}(r)$$

$$\vec{L}^2 \psi_{kl}(r) = \hbar^2 l(l+1) \psi_{kl}(r)$$

$$-\frac{1}{r^2} (2r \partial_r \psi_{kl}(r) + r^2 \partial_r^2 \psi_{kl}(r)) + \frac{l(l+1)}{r^2} \psi_{kl}(r) + \frac{2mV(r)}{\hbar^2} \psi_{kl}(r) = k^2 \psi_{kl}(r)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} \Psi_{kl}(r) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \Psi_{kl}(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} \Psi_{kl}(r) - \frac{2mV(r)}{\hbar^2} \Psi_{kl}(r) + k^2 \Psi_{kl}(r) = 0$$

Reskalierung: $g_l(r) := r \Psi_{kl}(r)$,

$$\text{sodass } \frac{d^2}{dr^2} \Psi_{kl}(r) + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \Psi_{kl}(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} g_l(r)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} g_l(r) - \frac{l(l+1)}{r^3} g_l(r) - \frac{2mV(r)}{\hbar^2 r} g_l(r) + \frac{k^2}{r} g_l(r) = 0$$

Weiterhin: $\tilde{r} \equiv kr$, dimensionlos

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2}{d\tilde{r}^2} - \frac{l(l+1)}{\tilde{r}^2} + 1 \right) g_l\left(\frac{\tilde{r}}{k}\right) = \frac{2m}{\hbar^2} V\left(\frac{\tilde{r}}{k}\right) g_l\left(\frac{\tilde{r}}{k}\right)$$

Das ist eine Form der radialen Schrödinger-Gleichung. Wir schreiben später nur noch $g_l(\tilde{r})$.¹

Vorbetrachtung #2:

Die Bessel'sche Differentialgleichung lautet

$$z''(x) + \frac{z'(x)}{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) z(x) = 0.$$

Zwei spezielle, linear unabhängige Lösungen² sind die Bessel-Funktionen $J_\nu(x)$ und die Neumann-Funktionen $Y_\nu(x)$, sodass die allgemeine Lösung geschrieben werden kann als

$$z(x) = A J_\nu(x) + B Y_\nu(x), \quad A, B \text{ const.}$$

1: sauberer wäre $g_{kl}(r) := r \Psi_{kl}(r)$, dann $g_l(\tilde{r}) := g_{kl}\left(\frac{\tilde{r}}{k}\right)$

2: Für $\nu \notin \mathbb{Z}$ genügen die Bessel-Funktionen $J_\nu(x)$, $J_{-\nu}(x)$.

Mit der Substitution $z(x) := \frac{g(x)}{\sqrt{x}}$ erhält man die Bessel'sche Differentialgleichung in der Form

$$g''(x) + \left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2}\right) g(x) = 0$$

und für halbzahlige Indizes $\nu = l + \frac{1}{2}$ ($l \in \mathbb{Z}$) schließlich

$$g''(x) + \left(1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right) g(x) = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung kann mit Hilfe der sphärischen Bessel- und Neumannfunktionen,

$$j_l(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x),$$

$$n_l(x) := \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{l+\frac{1}{2}}(x),$$

geschrieben werden als

$$g(x) = x \left(A j_l(x) + B n_l(x) \right).$$

Wir kehren zur ursprünglichen Aufgabe zurück und suchen einen Ausdruck für die Wellenfunktion, die außerhalb der Kugel ($r > R$) der Schrödinger-Gleichung mit $V(r) = 0$ gehorcht, also

$$\left(\frac{d^2}{d\tilde{r}^2} - \frac{l(l+1)}{\tilde{r}^2} + 1 \right) g_l(\tilde{r}) = 0.$$

Da es sich offenbar um eine Bessel'sche Differentialgleichung handelt, setzen wir an:

$$g_l(\tilde{r}) = \tilde{r} \left(A j_l(\tilde{r}) + B n_l(\tilde{r}) \right).$$

Wir fordern Stetigkeit am Ort $\tilde{r} = kR$, wobei $g_l(\tilde{r} \leq kR) = 0$:

$$A j_l(kR) + B n_l(kR) \stackrel{!}{=} 0.$$

→ einfachste Wahl: $A = C_l n_l(kR)$, $B = -C_l j_l(kR)$

$$\Rightarrow \underline{g_l(\tilde{r}) = C_l \tilde{r} \left(n_l(kR) j_l(\tilde{r}) - j_l(kR) n_l(\tilde{r}) \right)}$$

Wir haben nun das asymptotische Verhalten für $\tilde{r} \gg 1$ zu untersuchen.

Es gilt: $j_l(\tilde{r}) \approx \frac{\sin(\tilde{r} - l\frac{\pi}{2})}{\tilde{r}}$, $n_l(\tilde{r}) \approx -\frac{\cos(\tilde{r} - l\frac{\pi}{2})}{\tilde{r}}$ f. $\tilde{r} \rightarrow \infty$.

Wir fordern, dass sich die gestreute Wellenfunktion für jedes l nur durch eine Phase von der ungestreuten unterscheidet,

$$\begin{aligned} g_l(\tilde{r}) &\approx C_l \left[n_l(kR) \sin(\tilde{r} - l\frac{\pi}{2}) + j_l(kR) \cos(\tilde{r} - l\frac{\pi}{2}) \right] \stackrel{!}{=} \sin(\tilde{r} - l\frac{\pi}{2} + \delta_l) \\ &= \sin(\tilde{r} - l\frac{\pi}{2}) \cos(\delta_l) + \cos(\tilde{r} - l\frac{\pi}{2}) \sin(\delta_l), \end{aligned}$$

und können daraus die Streuphase bestimmen:

$$\left. \begin{aligned} C_l n_l(kR) &= \cos(\delta_l) \\ C_l j_l(kR) &= \sin(\delta_l) \end{aligned} \right\} \underline{\underline{\tan(\delta_l) = \frac{j_l(kR)}{n_l(kR)}}}$$

Für den totalen Wirkungsquerschnitt gilt (s. Vorlesung bzw. optisches Theorem)

$$\sigma = \sum_l \sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2(\delta_l).$$

$$\rightarrow \sin^2(\delta_l) = \frac{\tan^2(\delta_l)}{1 + \tan^2(\delta_l)} = \frac{j_l^2(kR)}{j_l^2(kR) + n_l^2(kR)}$$

Interessieren wir uns für kleine Energien, $kR \ll 1$, ist eine weitere Näherung gestattet; es gilt:

$$j_l(\tilde{r}) \approx \frac{\tilde{r}^l}{(2l+1)!!}, \quad n_l(\tilde{r}) \approx -\frac{(2l-1)!!}{\tilde{r}^{l+1}} \quad \text{für } \tilde{r} \rightarrow 0.$$

(Die Doppelfakultät multipliziert nur ungerade bzw. gerade Zahlen, z.B. $9!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$, $6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6$.)

$$\Rightarrow \sigma \approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{(kR)^{4l+2}}{(kR)^{4l+2} + (2l+1)!!^2 (2l-1)!!^2}$$

\uparrow
 ≈ 0

$$\approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left(\frac{(kR)^{2l+1}}{(2l+1)!!(2l-1)!!} \right)^2 \approx \frac{4\pi R^2}{\text{nur } l=0}$$

Das heißt: Nach mehr oder weniger brutaler Abschätzung erhalten wir den klassischen Wirkungsquerschnitt (Oberfläche der Kugel).