Symmetrisierung und Antisymmetrisierung

Notation: In jedem Hilbertraum H_k gibt es einen vollständigen Satz von Observablen (Quantenzahlen), die hier mit ξ zusammengefasst werden.

z.B. Ort und Spin: $|\xi_k\rangle \equiv |\vec{x}_k, s_k\rangle$,

$\vec{x}_k$: Ort des „k-ten Teilchens"
s_k : Spin des „k-ten Teilchens"
H_k : Hilbertraum des k-ten Teilchens

Identische Teilchen müssen ununterscheidbar sein, d.h. es darf nicht unterschieden werden können, ob Teilchen 1 mit Spin s_1 am Ort $\vec{x}_1$ ist und Teilchen 2 mit s_2 bei $\vec{x}_2$ oder umgekehrt.
Entsprechend müssen die Produktzustände zusammengefasst werden:

$$\underbrace{|\xi_1\rangle \otimes |\xi_2\rangle}_{\substack{\text{Teilchen 1 mit } \xi_1, \\ \text{Teilchen 2 mit } \xi_2}}, \quad \underbrace{|\xi_2\rangle \otimes |\xi_1\rangle}_{\substack{\text{Teilchen 1 mit } \xi_2, \\ \text{Teilchen 2 mit } \xi_1}}$$

Symmetrisierung für Bosonen (ganzzahliger Spin)
Antisymmetrisierung für Fermionen (halbzahliger Spin)

allgemeine Definition:

$$\mathrm{Sym}(x_1 x_2 \dots x_n) \equiv x_{(1} x_2 \dots x_{n)} = \frac{1}{n!} \underbrace{\left(x_1 x_2 \dots x_n + x_2 x_3 \dots x_n x_1 + x_3 x_4 \dots x_n x_1 x_2 + \dots \right)}_{\text{alle möglichen Permutationen}}$$

$$\mathrm{ASym}(x_1 x_2 \dots x_n) \equiv x_{[1} x_2 \dots x_{n]} = \frac{1}{n!} \underbrace{\left(x_1 x_2 \dots x_n + x_2 x_3 \dots x_n x_1 - x_2 x_1 x_3 \dots x_n \pm \dots \right)}_{\text{Minus für ungerade Permutationen}}$$

Da Betragsquadrate normiert werden sollen, normieren wir die (anti-) symmetrischen Wellenfunktionen mit $\sqrt{n!}$.

symmetrische Wellenfunktion dreier Bosonen:

$$\begin{aligned}\psi_s(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(&\psi_1(\xi_1)\psi_2(\xi_2)\psi_3(\xi_3) + \psi_1(\xi_2)\psi_2(\xi_3)\psi_3(\xi_1)\\ &+ \psi_1(\xi_3)\psi_2(\xi_1)\psi_3(\xi_2) + \psi_1(\xi_1)\psi_2(\xi_3)\psi_3(\xi_2)\\ &+ \psi_1(\xi_3)\psi_2(\xi_2)\psi_3(\xi_1) + \psi_1(\xi_2)\psi_2(\xi_1)\psi_3(\xi_3)\Big)\end{aligned}$$

antisymmetrische Wellenfunktion dreier Fermionen:

$$\begin{aligned}\psi_a(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(&\psi_1(\xi_1)\psi_2(\xi_2)\psi_3(\xi_3) + \psi_1(\xi_2)\psi_2(\xi_3)\psi_3(\xi_1)\\ &+ \psi_1(\xi_3)\psi_2(\xi_1)\psi_3(\xi_2) - \psi_1(\xi_1)\psi_2(\xi_3)\psi_3(\xi_2)\\ &- \psi_1(\xi_3)\psi_2(\xi_2)\psi_3(\xi_1) - \psi_1(\xi_2)\psi_2(\xi_1)\psi_3(\xi_3)\Big)\end{aligned}$$

Notation: $\psi_i(\xi_k)$ $\longrightarrow$ Wellenfunktion des i-ten Teilchens in Abhängigkeit der Observablen des k-ten Teilchens

Beachte, dass egal ist, ob über i oder k (anti-) symmetrisiert wird.

Erwartungswert eines Einteilchenoperators:

Einteilchenoperator: $\underset{\text{auf } \mathcal{H}_1}{A = A(1)} + \underset{\text{auf } \mathcal{H}_2}{A(2)} + \underset{\text{auf } \mathcal{H}_3}{A(3)}$

Abkürzung der Notation:

$$|\xi_1\rangle \otimes |\xi_2\rangle \otimes |\xi_3\rangle \equiv |\xi_1\rangle|\xi_2\rangle|\xi_3\rangle$$
$$|\xi_3\rangle \otimes |\xi_1\rangle \otimes |\xi_2\rangle \equiv |\xi_2\rangle|\xi_3\rangle|\xi_1\rangle \qquad (!)$$

Wir betrachten den antisymmetrischen Zustand

$$|\psi_a\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(|\xi_1\rangle|\xi_2\rangle|\xi_3\rangle + |\xi_2\rangle|\xi_3\rangle|\xi_1\rangle + |\xi_3\rangle|\xi_1\rangle|\xi_2\rangle - |\xi_2\rangle|\xi_1\rangle|\xi_3\rangle - |\xi_1\rangle|\xi_3\rangle|\xi_2\rangle - |\xi_3\rangle|\xi_2\rangle|\xi_1\rangle \Big).$$

Erwartungswert:

$$\langle\psi_a|A|\psi_a\rangle = \langle\psi_a|A(1)|\psi_a\rangle + \langle\psi_a|A(2)|\psi_a\rangle + \langle\psi_a|A(3)|\psi_a\rangle$$

$$\langle\psi_a|A(1)|\psi_a\rangle \;\text{mit}\; A(1)|\psi_a\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(\big(A(1)|\xi_1\rangle\big)|\xi_2\rangle|\xi_3\rangle + |\xi_2\rangle|\xi_3\rangle\big(A(1)|\xi_1\rangle\big) + |\xi_3\rangle\big(A(1)|\xi_1\rangle\big)|\xi_2\rangle - |\xi_2\rangle\big(A(1)|\xi_1\rangle\big)|\xi_3\rangle - \big(A(1)|\xi_1\rangle\big)|\xi_3\rangle|\xi_2\rangle - |\xi_3\rangle|\xi_2\rangle\big(A(1)|\xi_1\rangle\big)\Big)$$

Es gilt:

- $$\langle\xi_3|\langle\xi_2|\underbrace{\langle\xi_1|A(1)|\xi_1\rangle}_{\in\,\mathbb{C}}|\xi_2\rangle|\xi_3\rangle$$
  $$= \langle\xi_1|A(1)|\xi_1\rangle\,\langle\xi_3|\underbrace{\langle\xi_2|\xi_2\rangle}_{1\text{ für normierte Zustände}}|\xi_3\rangle$$
  $$= \langle\xi_1|A(1)|\xi_1\rangle$$

- $$\langle\xi_2|\langle\xi_3|\langle\xi_1|A(1)|\xi_1\rangle|\xi_2\rangle|\xi_3\rangle$$
  $$= \langle\xi_2|\underbrace{\langle\xi_3|\xi_2\rangle}_{0\text{ für orthogonale Zustände}}|\xi_3\rangle\,\langle\xi_1|A(1)|\xi_1\rangle$$

$\Rightarrow$ Es bleiben nur Terme, in denen dieselbe Permutation auf beiden Seiten steht.

$\Rightarrow$ Die negativen Vorzeichen ungerader Permutationen heben sich weg.

$\Rightarrow$ Es bleiben für jeden Operator $A(i)$ genau 6 mal dieselben Terme übrig.

$$\rightarrow \langle \psi_a | A | \psi_a \rangle = \frac{6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} \Big(\underbrace{\langle \xi_1 | A(1) | \xi_1 \rangle}_{= \sum_{m_{s_1}} \int d^3\vec{x}_1 \; \psi_1^\dagger(\vec{x}_1, m_{s_1})\, A(\vec{x}_1, m_{s_1})\, \psi_1(\vec{x}_1, m_{s_1})} + \langle \xi_2 | A(2) | \xi_2 \rangle + \langle \xi_3 | A(3) | \xi_3 \rangle \Big)$$

Vergleiche mit Formel (2.82) im Vorlesungsskript.

Erklärung zu (!)

In $|\xi_3\rangle \otimes |\xi_1\rangle \otimes |\xi_2\rangle$ steht an k-ter Stelle immer ein Element des Hilbertraums $\mathcal{H}_k$ und (anti-) symmetrisiert wird über die Observablen ξ_i. Ein Einteilchenoperator $A(k)$, der nur auf $\mathcal{H}_k$ definiert ist, steht somit immer an k-ter Stelle.
In $|\xi_2\rangle|\xi_3\rangle|\xi_1\rangle$ dagegen ist $|\xi_k\rangle$ immer ein Element des Hilbertraums $\mathcal{H}_k$ und die Observablen sind an die Reihenfolge gebunden. (Anti-) Symmetrisiert wird über die Reihenfolge und ein Einteilchenoperator $A(k)$ wirkt stets auf $|\xi_k\rangle$.
Durch die (Anti-) Symmetrisierung wird die Unterscheidung beider Schreibweisen obsolet.