Zusammengesetzte Hilberträume

Um komplexere quantenmechanische Systeme betrachten zu können, braucht man das Tensorprodukt mehrerer Hilberträume:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_N .$$

Notation:

- Basis des Hilbertraums $\mathcal{H}_k$: $\{|n_k\rangle\}$

  → k gibt an, welcher Hilbertraum gemeint ist.

  → n numeriert die Basiselemente von $\mathcal{H}_k$.

- Produktzustände:

  $|\psi_1 \psi_2 \ldots \psi_N\rangle \equiv |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \ldots \otimes |\psi_N\rangle$,

  → $|\psi_1 \psi_2 \ldots \psi_N\rangle \in \mathcal{H}$

  → $|\psi_k\rangle \in \mathcal{H}_k$

- Operatoren:

  A_k operiert auf $\mathcal{H}_k$, sprich: $A_k : \mathcal{H}_k \to \mathcal{H}_k$.

Es ist $\mathcal{H}$ der Raum, der von allen möglichen Produktzuständen aufgespannt wird. Insbesondere bilden die Produktzustände der Basisvektoren eine Basis von $\mathcal{H}$:

$$\text{Basis}(\mathcal{H}) = \{|n_1 n_2 \ldots n_N\rangle\} .$$

Natürlich sind nicht alle Elemente von $\mathcal{H}$ als Produktzustände zu schreiben („verschränkte" Zustände).

Das Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ lässt sich durch die Skalarprodukte der einzelnen $\mathcal{H}_k$ definieren:

$$\langle \phi_1 \phi_2 \dots \phi_N | \psi_1 \psi_2 \dots \psi_N \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \phi_1 | \psi_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \phi_2 | \psi_2 \rangle_{\mathcal{H}_2} \dots \langle \phi_N | \psi_N \rangle_{\mathcal{H}_N} .$$

Die Dimension von $\mathcal{H}$ ist nach Konstruktion das Produkt der einzelnen Dimensionen,

$$\dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathcal{H}_1) \dim(\mathcal{H}_2) \dots \dim(\mathcal{H}_N).$$

Man definiert das Tensorprodukt von Operatoren unter Berücksichtigung, dass jeder Operator nur auf dem Hilbertraum wirken darf, auf dem er definiert ist:

$$A = A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_N \quad , \quad \text{sodass}$$

$$A | \psi_1 \psi_2 \dots \psi_N \rangle = \big(A_1 | \psi_1 \rangle \big) \otimes \big(A_2 | \psi_2 \rangle \big) \otimes \dots \otimes \big(A_N | \psi_N \rangle \big).$$

Sind $a_1, a_2, \dots, a_N$ die Eigenwerte von $A_1, A_2, \dots, A_N$, dann ist $a_1 a_2 \dots a_N$ Eigenwert des Tensorproduktes,

$$\begin{aligned} A | \psi_1 \psi_2 \dots \psi_N \rangle &= \big(A_1 | \psi_1 \rangle \big) \otimes \big(A_2 | \psi_2 \rangle \big) \otimes \dots \otimes \big(A_N | \psi_N \rangle \big) \\ &= \big(a_1 | \psi_1 \rangle \big) \otimes \big(a_2 | \psi_2 \rangle \big) \otimes \dots \otimes \big(a_N | \psi_N \rangle \big) \\ &= a_1 a_2 \dots a_N | \psi_1 \psi_2 \dots \psi_N \rangle . \end{aligned}$$

Um die Summe von Operatoren verschiedener Hilberträume definieren zu können, einigt man sich darauf, dass ein Operator auf allen $\mathcal{H}_k$, auf denen er eigentlich nicht definiert ist, als Identität wirkt. Formal:

$$\text{"} A_k = 1\!\!1 \otimes 1\!\!1 \otimes \ldots \otimes \underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-te Stelle}}}{A_k} \otimes \ldots \otimes 1\!\!1 \text{"}$$

$$\rightarrow \quad A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_N = A_1 \otimes 1\!\!1 \otimes 1\!\!1 \otimes \ldots + 1\!\!1 \otimes A_2 \otimes 1\!\!1 \otimes \ldots + \ldots + 1\!\!1 \otimes 1\!\!1 \otimes \ldots \otimes A_N$$

$\rightarrow \quad A = A_1 + A_2 + \ldots + A_N$, sodass

$$A|\psi_1 \psi_2 \ldots \psi_N\rangle = \big(A_1|\psi_1\rangle\big) \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle \otimes \ldots \otimes |\psi_N\rangle + |\psi_1\rangle \otimes \big(A_2|\psi_2\rangle\big) \otimes |\psi_3\rangle \otimes \ldots \otimes |\psi_N\rangle + \ldots + |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \ldots \otimes \big(A_N|\psi_N\rangle\big)$$

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_N$ wieder die Eigenwerte von $A_1, A_2, \ldots, A_N$, dann ist $a_1 + a_2 + \ldots + a_N$ offenbar Eigenwert der Summe,

$$A|\psi_1 \psi_2 \ldots \psi_N\rangle = (a_1 + a_2 + \ldots + a_N)|\psi_1 \psi_2 \ldots \psi_N\rangle .$$

Beispiel für $N=3$

Wir betrachten 3 Hilberträume.

$\mathcal{H}_1$: $\dim(\mathcal{H}_1) = 2$, Basis : $\{|n_1\rangle\} = \{|1\rangle, |2\rangle\}$

$\mathcal{H}_2$: $\dim(\mathcal{H}_2) = 3$, Basis : $\{|n_2\rangle\} = \{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$

$\mathcal{H}_3$: $\dim(\mathcal{H}_3) = 1$, Basis : $\{|n_3\rangle\} = \{|1\rangle\}$

Beachte: Die Elemente der Räume sind vollkommen verschieden, $|2\rangle$ aus $\mathcal{H}_1$ ist nicht dasselbe wie $|2\rangle$ aus $\mathcal{H}_2$! Man könnte z.B. schreiben $|1\rangle_1$, $|2\rangle_1$, $|1\rangle_2$, u.s.w. ; braucht man aber nicht, da ein Element des k-ten Hilbertraumes im Tensorprodukt immer an k-ter Stelle steht.

Tensorierung : $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$

Es ist jetzt die Menge aller $|n_1 n_2 n_3\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \otimes |n_3\rangle$ eine Basis von $\mathcal{H}$:

$$\text{Basis}(\mathcal{H}) = \{|111\rangle, |121\rangle, |131\rangle, |211\rangle, |221\rangle, |231\rangle\}.$$

Wie erwartet ist die Dimension

$$\dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathcal{H}_1) \cdot \dim(\mathcal{H}_2) \cdot \dim(\mathcal{H}_3) = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6.$$

Sei: A_1 ein Operator auf $\mathcal{H}_1$ mit Eigenwert a_1 zu $|\psi_1\rangle$,
A_2 ein Operator auf $\mathcal{H}_2$ mit Eigenwert a_2 zu $|\psi_2\rangle$ und
A_3 ein Operator auf $\mathcal{H}_3$ mit Eigenwert a_3 zu $|\psi_3\rangle$.

Dann ist $A = A_1 \otimes A_2 \otimes A_3$ ein Operator auf $\mathcal{H}$ mit

$$A\,|\psi_1\psi_2\psi_3\rangle = (A_1 \otimes A_2 \otimes A_3)\;|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle$$

$$= \big(A_1|\psi_1\rangle\big) \otimes \big(A_2|\psi_2\rangle\big) \otimes \big(A_3|\psi_3\rangle\big)$$

$$= a_1 a_2 a_3 \big(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle\big) \;=\; a_1 a_2 a_3\,|\psi_1\psi_2\psi_3\rangle.$$

Ebenso ist $A = A_1 + A_2 + A_3$ ein Operator auf $\mathcal{H}$ mit

$$A\,|\psi_1\psi_2\psi_3\rangle = (A_1 + A_2 + A_3)\;|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle$$

$$= \big(A_1|\psi_1\rangle\big) \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle + |\psi_1\rangle \otimes \big(A_2|\psi_2\rangle\big) \otimes |\psi_3\rangle + |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \big(A_3|\psi_3\rangle\big)$$

$$= a_1\;|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle + a_2\;|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle + a_3\;|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3)\,|\psi_1\psi_2\psi_3\rangle.$$

Anwendung: Die zusammengesetzten Hilberträume beschreiben zusammengesetzte Systeme; bspw. könnten $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ die Hilberträume zweier Teilchen sein. Man bezeichnet dann Summen von Operatoren als Einteilchenoperatoren.
Vielteilchenoperatoren hingegen hängen von Zuständen aus mehreren Hilberträumen ab.

Bsp.: für Einteilchenoperator: kinetische Energie
für Zweiteilchenoperator: Coulomb-Potential geladener Teilchen