Die Legendre-Transformation in der klassischen Mechanik

Die Legendre-Transformation verbindet Lagrange- und Hamilton-Funktion in der klassischen Mechanik.

<u>Definition</u> (Vorlesung):

$$(\mathcal{L}g)(x) := \sup_y \left(yx - g(y)\right)$$

Extremum: $\quad 0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(yx - g(y)\right) = x - \frac{\partial g}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\partial g}{\partial y}$

Nach dieser Vorschrift folgt die Hamilton-Funktion (als Funktion generalisierter Koordinaten q_k und Impulse p_k) aus der Lagrange-Funktion (als Funktion generalisierter Koordinaten q_k und Geschwindigkeiten $\dot{q}_k$):

$$H(q_k, p_k) = \sup_{\dot{q}_k}\left(p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k)\right), \qquad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}.$$

<u>Beispiele:</u>

- harmonischer Oszillator,

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \quad \longrightarrow \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\Rightarrow \quad H(x,p) = p\dot{x} - \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = \underline{\underline{\frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2}}$$

- Elektron im elektromagnetischen Feld $\vec{A}, \phi$

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{v}}^2 + e\vec{A}\vec{v} - e\phi$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) + e\left(A_1\dot{x}_1 + A_2\dot{x}_2 + A_3\dot{x}_3\right) - e\phi$$

$$\longrightarrow \quad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = m\dot{x}_k + eA_k \quad , \qquad \dot{x}_k = \frac{p_k - eA_k}{m}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\underline{H = \frac{1}{2m}\left[(p_1 - eA_1)^2 + (p_2 - eA_2)^2 + (p_3 - eA_3)^2\right] + e\phi}}$$