# Hohlraumstrahlung

(nach: Kluge/Neugebauer)

Ein elektromagnetisches Strahlungsfeld, das in einem Volumen $V$ eingeschlossen ist (strahlungsundurchlässige Wände), wird als Hohlraumstrahlung bezeichnet.

Im Gleichgewicht kann die Temperatur der Wände dem gesamten System zugeordnet werden, sodass der nullte Hauptsatz greift und Thermodynamik betrieben werden kann; man spricht von einem <u>Photonengas.</u>

empirische Feststellung: Energiedichte nur von $T$ abhängig

$\Rightarrow$ kalorische Zustandsgleichung, $\quad U(T,V) = u(T)\,V$

Elektrodynamik: Maxwell'scher Spannungstensor

$\Rightarrow$ thermische Zustandsgleichung, $\quad p = \frac{1}{3} u(T)$

Im Beispiel „kalorische und thermische Zustandsgleichung" haben wir aus obigen Gleichungen die Beziehungen

$$p = \frac{1}{3} b T^4 \quad , \quad U = b T^4 V \qquad (b = \text{const})$$

hergeleitet. Für die Entropie gilt nach 1. und 2. Hauptsatz:

$$T\,dS = dU + p\,dV .$$

$$\left.\begin{aligned} dU &= 4bT^3V\,dT + bT^4\,dV \\ p\,dV &= \frac{1}{3} bT^4\,dV \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} dS &= 4bT^2V\,dT + \frac{4b}{3}T^3\,dV \\ &= \frac{4b}{3}\,d(T^3V) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{S(T,V) = \frac{4b}{3} T^3 V}}$$

**Bem:** Die Integrationskonstante ist Null, da die Entropie nach dem 3. Hauptsatz für $T \to 0$ verschwinden muss.

weitere Größen:

- Wärmekapazität, $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 4bT^3V$
- Freie Energie, $F = U - TS = -\frac{b}{3}T^4V$
- Freie Enthalpie, $G = U + pV - TS = 0$
- chemisches Potential, $\mu = G/N = 0$

**Bem:**

- Die Konstante $b$ kann experimentell bestimmt werden und beträgt $b = 7{,}56 \cdot 10^{-16} \frac{\mathrm{Ws}}{\mathrm{m^3 K^4}}$.
- Für Zimmertemperatur $T = 220\,\mathrm{K}$ ergibt sich ein Druck von $p = 5{,}9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{Pa} = 5{,}9 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{bar}$, also ein verschwindend geringer Wert.
- Da $p = \frac{b}{3}T^4$, sind isobare Prozesse gleichzeitig isotherm; $C_p$ ist nicht sinnvoll definierbar.
- Einem Photonengas kann keine sinnvolle Teilchenzahl zugeordnet werden. Das ist der Grund für das Verschwinden des chemischen Potentials.
- Der Druck des Photonengases erreicht beispielsweise im Inneren von Sternen relevante Werte.

# Herleitung der Strahlungsgesetze

Ein Körper, der jegliche einfallende Strahlung absorbiert, heißt <u>schwarzer Körper</u>. Die Strahlung eines schwarzen Körpers kann als Hohlraumstrahlung beschrieben werden.

Die von einem schwarzen Körper (je Flächeneinheit) emittierte Strahlungsleistung $P$ ist gleich der Strahlungsdichte $J = \frac{c}{4} u$ (c: Lichtgeschwindigkeit) der Hohlraumstrahlung:

$$P = J = \frac{c}{4} u .$$

Mit dem Ausdruck für die Energiedichte folgt daraus das <u>Stefan-Boltzmann-Gesetz</u>:

$$P = \frac{cb}{4} T^4 \equiv \sigma T^4 .$$

Wir versuchen im Folgenden, einen Ausdruck für die spektrale Energiedichte $u_\nu(T,\nu)$ zu finden,

$$u(T) =: \int_0^\infty d\nu \; u_\nu(T,\nu) .$$

Mit der spektralen Energie $U_\nu$ und der Dichte der Moden $D(\nu)$ (stehende Wellen verschiedener Frequenzen $\longrightarrow$ $D(\nu)$ gibt die Anzahl harmonischer Oszillatoren, die mit Frequenz $\nu$ schwingen) muss gelten:

$$u_\nu(T,\nu) = \frac{U_\nu(T,\nu)}{V} = \frac{U(T,\nu)\, D(\nu)}{V} .$$

Hierbei ist $U(T,\nu)$ die Energie eines einzelnen harmonischen Oszillators.

1. Bestimmung der inneren Energie eines einzelnen harmonischen Oszillators

Quantenmechanik: Jeder harmonische Oszillator setzt sich aus Photonen der Energie $h\nu$ zusammen ($h$: Planck'sches Wirkungsquantum).

$\rightarrow$ Energieeigenwerte $\varepsilon_n = h\nu\left(n+\frac{1}{2}\right)$

Wir benötigen die Zustandssumme $Z$ (s. Vorlesung, später),

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{h\nu}{kT}\left(n+\frac{1}{2}\right)} \approx \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{h\nu}{kT}n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{geometr. Reihe}}}{=} \frac{1}{1-\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)},$$

um daraus mittels $F = -kT\ln(Z)$ die Freie Energie und wiederum die innere Energie bestimmen zu können:

$$U = F + TS \underset{\substack{\uparrow \\ S = -\frac{\partial F}{\partial T}}}{=} F - T\frac{\partial F}{\partial T} = -T^2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right).$$

$\Longrightarrow$ (kurze Rechnung) $$U(T,\nu) = h\nu\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1}$$

2. Bestimmung der Modendichte $D(\nu)$

betrachten Wellengleichung des elektrischen Feldes:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{E} = 0$$

Randbedingungen: Würfel mit Kantenlänge $l$, sodass Tangentialkomponenten verschwinden,

$$E_y(x=0,l\,;\,y;\,z) = E_z(x=0,l\,;\,y;\,z) \overset{!}{=} 0$$
$$E_x(x;\,y=0,l\,;\,z) = E_z(x;\,y=0,l\,;\,z) \overset{!}{=} 0$$
$$E_x(x;\,y;\,z=0,l) = E_y(x;\,y;\,z=0,l) \overset{!}{=} 0$$

Lösung:
$$E_x = E_x^{(0)} \cos(k_x x)\sin(k_y y)\sin(k_z z)\, e^{2\pi i \nu t}$$
$$E_y = E_y^{(0)} \sin(k_x x)\cos(k_y y)\sin(k_z z)\, e^{2\pi i \nu t}$$
$$E_z = E_z^{(0)} \sin(k_x x)\sin(k_y y)\cos(k_z z)\, e^{2\pi i \nu t}$$

mit $\vec{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \dfrac{(2\pi\nu)^2}{c^2}$ $(*)$

außerdem: $\operatorname{div}\vec{E} = 0 \Rightarrow k_x E_x^{(0)} + k_y E_y^{(0)} + k_z E_z^{(0)} = 0$

aus den Randbedingungen: $\vec{k} = \frac{\pi}{l}\vec{n}$, $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$; $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{N}_0$

Die Zahl der Moden mit $|\vec{n}| \leq n$ kann durch die Anzahl Punkte innerhalb eines Oktanden einer Kugel mit Radius $n$ abgeschätzt werden,

$$M = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi n^3 .$$

Der Faktor 2 berücksichtigt die zu jeder Mode gehörenden unabhängigen Polarisationsrichtungen.

$$\xrightarrow{(*)} \quad M(\nu) = \frac{8\pi}{3} V \frac{\nu^3}{c^3}$$

Es gibt nun $dM(\nu) = 8\pi V \frac{\nu^2}{c^3}\, d\nu$ die Anzahl Moden im Intervall $d\nu$. Gleichzeitig muss gelten $dM(\nu) = D(\nu)\, d\nu$, sodass folgt:

$$D(\nu) = 8\pi V \frac{\nu^2}{c^3} .$$

Mit diesen Ergebnissen folgt für $u_\nu(T,\nu)$ die wohlbekannte <u>Planck'sche Strahlungsformel</u>,

$$u_\nu(T,\nu) = 8\pi \frac{h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} \, .$$

Aus ihr kann die Energiedichte $u(T)$ ermittelt werden und mit $P = \frac{c}{4} u$ folgt erneut das Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$P = \frac{2\pi k^4}{c^2 h^3} T^4 \int_0^\infty dx \, \frac{x^3}{e^x - 1} \quad , \quad x \equiv \frac{h\nu}{kT} \, .$$

Für kleine Frequenzen folgt aus der Planck'schen Strahlungsformel die <u>Rayleigh-Jeans'sche Strahlungsformel</u>, für große Frequenzen die <u>Wien'sche Strahlungsformel</u>.