Physikalische Systeme im Phasenraum

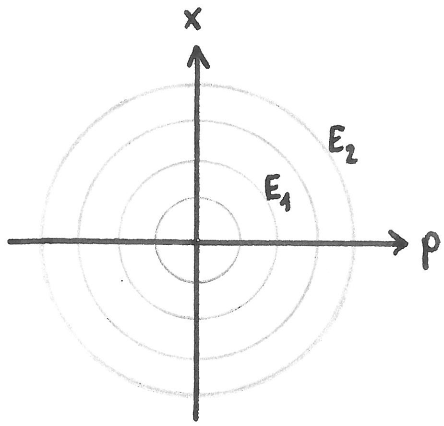
Der überwiegende Teil realer physikalischer Systeme ist nicht integrabel; sie verhalten sich chaotisch.

Im Phasenraum fasst man Orts- und Impulskoordinaten aller Teilchen zusammen:

$$\left.\begin{array}{ll} q_i \,, & i=1,\dots,f \\ p_i \,, & i=1,\dots,f \end{array} \quad f\text{: Zahl der Freiheitsgrade} \right\} \text{Dimension } 2f$$

Die Bewegungsgleichungen (Differentialgleichungen 1. Ordnung) beschreiben Lösungskurven im Phasenraum. Wir betrachten ausschließlich autonome Systeme: solche, deren Lösungskurven sich nicht schneiden.

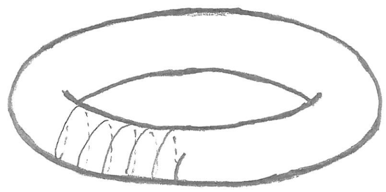
Bsp. Lösungskurven des eindimensionalen harmonischen Oszillators



Energien: $E_2 > E_1$

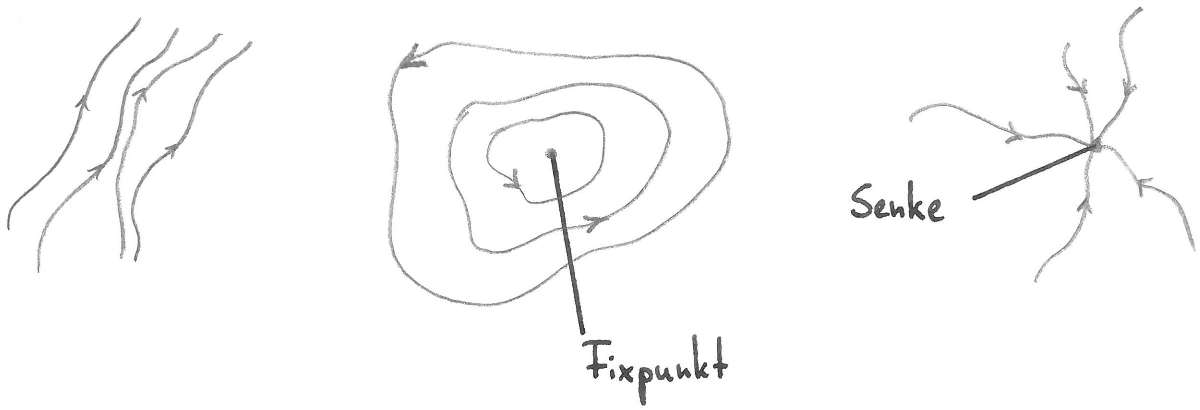
Mittelpunkt: $E = 0$

Die Lösungskurven zweier entkoppelter Oszillatoren beschreiben das Produkt zweier Kreise $S^1 \times S^1$, also einen Torus.



Die beiden Radien repräsentieren die beiden Energien der Oszillatoren.

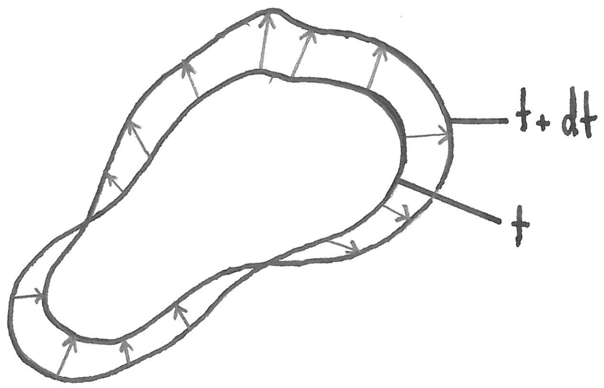
Möglichkeiten für Lösungskurven im Allgemeinen:

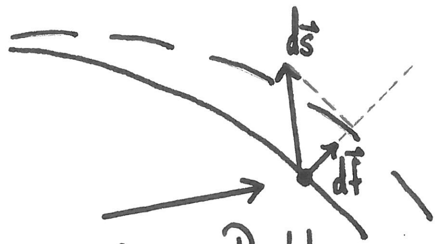


An sogenannten <u>Fixpunkten</u> sind die Bewegungsgleichungen trivial erfüllt. Existiert ein Fixpunkt, dann (und nur dann) sind die Lösungskurven periodisch.

Volumina im Phasenraum

Im Allgemeinen ist es möglich, dass sich Volumina durch die Zeitentwicklung der sie eingrenzenden Punkte ändern.
Sei $d\hat{V}$ die Differenz der Volumina zu Zeiten t und $t+dt$.





Bewegung eines Punktes $\vec{r}$ mit Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}) = \dfrac{d\vec{s}(\vec{r})}{dt}$

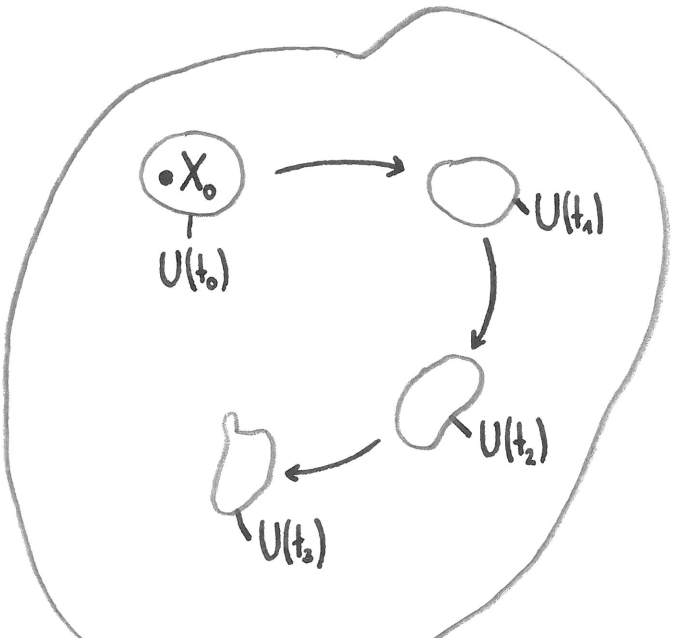
$$\longrightarrow \quad d\hat{V} = \int_{\partial V} d\vec{s}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}(\vec{r}) = \int_{\partial V} d\vec{v}(\vec{r})\, dt\, d\vec{f}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\hat{V}}{dt} = \int_{\partial V} d\vec{v} \cdot d\vec{f} = \underline{\int_V \operatorname{div}(\vec{v}) \, dV}$$

Gilt $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$, bleiben die Volumina im Phasenraum zeitlich konstant; man spricht von einem nicht-dissipativen System.

<u>Bem.</u> Die Bedingung $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$ beschreibt außerdem das Verhalten inkompressibler Flüssigkeiten. Sie besagt, dass das Geschwindigkeitsfeld Quellen- und Senkenfrei ist.

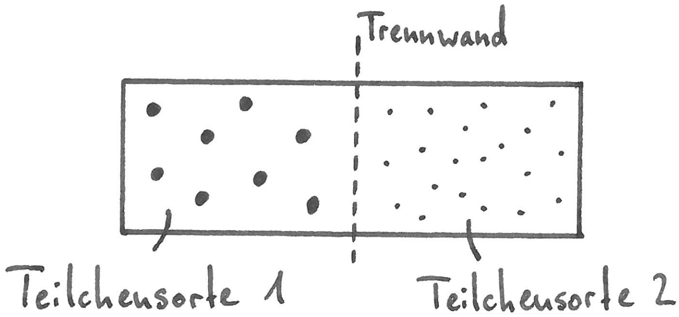
Betrachten wir ein nicht-dissipatives System im Phasenraum mit Anfangszustand X_0 zur Zeit t_0. Um X_0 befinde sich eine ($2f$-dimensionale) Umgebung $U(t_0)$. Der Phasenraum sei endlich (Existenz physikalischer Systemgrenzen).



Da das Volumen der Umgebung unter Zeitentwicklung konstant bleibt, muss $U(t_n)$ für genügend großes n mit $U(t_0)$ überlappen.
Das muss auch für beliebig kleine Umgebungen gelten.

Das heißt: Es befindet sich in jeder beliebigen Umgebung des Ausgangspunktes ein Punkt, der in diese Umgebung zurückkehrt. Das ist das <u>Poincaré'sche Wiederkehrtheorem.</u>

Paradoxon:



Das Wiederkehrtheorem besagt, dass es nach Entfernung der Trennwand und Durchmischung der Teilchen einen Zeitpunkt gibt, zu dem sich das System wieder im ungemischten Zustand befindet (ohne äußere Einwirkung).

Das steht im Widerspruch zu aller Erfahrung und würde einer Abnahme der Entropie entsprechen!

Auflösung des Paradoxons:

1. Statistische Interpretation des zweiten Hauptsatzes. Die zeitweise Abnahme der Entropie ist als Fluktuation zu betrachten, die sich über hinreichend große Skalen herausmittelt.

2. Wartezeit. Die Wiederkehrzeit vermag das Alter des Universums zu übersteigen.

Zum zweiten Punkt sei ein Zitat von Boltzmann angegeben, der eine Abschätzung der Wiederkehrzeit vornahm:

> „Wie groß aber schon die Zahl [...] ist, davon erhält man einen Begriff, wenn man bedenkt, dass sie viele Trillionen Stellen hat. Wenn dagegen um jeden mit dem besten Fernrohr sichtbaren Fixstern so viele Planeten wie um die Sonne kreisten, wenn auf jedem dieser Planeten so viele Menschen wie auf der Erde wären und jeder dieser Menschen eine Trillionen Jahre lebte, so hätte die Zahl der Sekunden, welche alle zusammen erleben, noch lange nicht 50 Stellen."

Hamilton'sche Systeme im Phasenraum

Zunächst eine kurze Wiederholung der Hamilton'schen Mechanik.

Die Hamilton-Funktion $H(q_k, p_k; t)$ hängt von den generalisierten Koordinaten q_k und den generalisierten Impulsen p_k ab.

Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k \qquad (*)$$

Definition der Poisson-Klammern:

$$\{f, g\} := \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q_j} \right) ,$$

für Phasenraumfunktionen $f(q_k, p_k)$, $g(q_k, p_k)$

→ Antisymmetrie: $\{f,g\} = -\{g,f\}$

→ Jacobi-Identität: $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$

Mit Hilfe der Poisson-Klammern können

1. die kanonischen Bewegungsgleichungen (*) geschrieben werden als

$$\dot{q}_k = \{q_k, H\} \quad , \qquad \dot{p}_k = \{p_k, H\} \quad ;$$

2. die Zeitentwicklungen beliebiger Phasenraumfunktionen geschrieben werden als

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad .$$

Eine Transformation der Koordinaten des Phasenraumes, $(q_k, p_k) \longmapsto (Q_k, P_k)$, heißt <u>kanonische Transformation</u>, wenn sie die Form der Bewegungsgleichungen erhält, also gilt

$$\frac{\partial H}{\partial P_k} = \dot{Q}_k \quad , \qquad \frac{\partial H}{\partial Q_k} = -\dot{P}_k \quad .$$

Insbesondere sind die Poisson-Klammern invariant unter kanonischen Transformationen,

$$\{f, g\}_{q_k, p_k} = \{f, g\}_{Q_k, P_k} \quad .$$

Sei M die einer Koordinatentransformation zugeordnete Jacobi-Matrix, also $M_{ij} := \frac{\partial y_i}{\partial x_j}$ mit $y = (Q, P)$: neue Koord.
$x = (q, p)$: alte Koord.

Dann ist die Transformation genau dann kanonisch, wenn M <u>symplektisch</u> ist, also gilt $M^T J M = J$ mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_f \\ -\mathbb{1}_f & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Bem.</u>

- Die symplektische Struktur ist bereits in (*) zu erkennen.
- Die Menge aller symplektischen $(2f \times 2f)$-Matrizen bildet die symplektische Gruppe $Sp(2f)$.

Kompakte Formulierung der Bewegungsgleichungen im Phasenraum mittels Koordinatenvektor

$$x = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix},$$

$$\dot{x} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} \partial H/\partial p_1 \\ \vdots \\ \partial H/\partial p_f \\ -\partial H/\partial q_1 \\ \vdots \\ -\partial H/\partial q_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_f \\ -\mathbb{1}_f & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} \partial H/\partial q_1 \\ \vdots \\ \partial H/\partial q_f \end{matrix}\right\} f \\ \left.\begin{matrix} \partial H/\partial p_1 \\ \vdots \\ \partial H/\partial p_f \end{matrix}\right\} f \end{pmatrix} = J \cdot (\mathrm{grad}_x H)$$

$$\boxed{\dot{x} = J \cdot (\mathrm{grad}_x H)}$$

Der harmonische Oszillator

nach: Nolting, Theoretische Physik VI, Springer, 2007

Hamilton-Funktion, nicht-dissipativ:

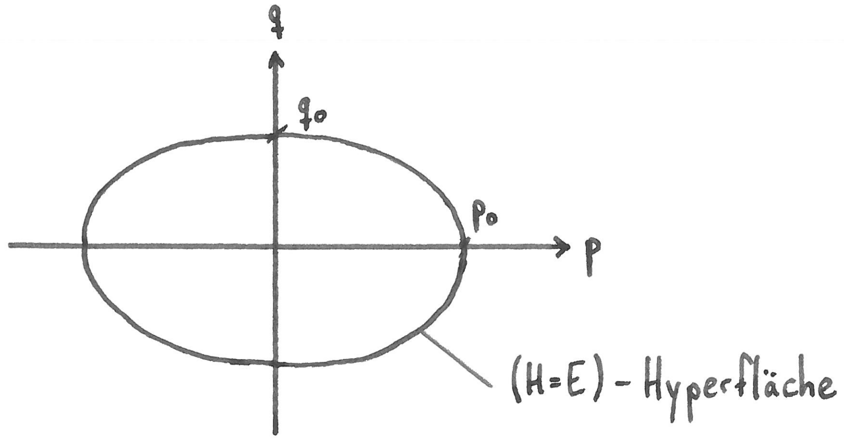
$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

feste Energie: $\quad H(p,q) \overset{!}{=} E$

$$\longrightarrow \quad \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/(m\omega^2)} = 1$$

Das ist die Gleichung einer Ellipse mit Halbachsen

$p_0 \equiv \sqrt{2mE}$, $\quad q_0 \equiv \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$, $\quad$ also $\quad \frac{p^2}{p_0^2} + \frac{q^2}{q_0^2} = 1.$



Die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen bestimmen die Trajektorie im Phasenraum:

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} = \frac{p}{m} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} = m\omega^2 q .$$

$$dq = \frac{p}{m}\, dt \quad \longleftarrow \quad p = p_0 \sqrt{1 - \frac{q^2}{q_0^2}}$$

$$= \frac{p_0}{m} \sqrt{1 - \frac{q^2}{q_0^2}}\; dt$$

$$\frac{dq}{\sqrt{1-\frac{q^2}{q_0^2}}} = \frac{p_0}{m}\,dt$$

$$q_0 \int_{q(0)}^{q(t)} \frac{dq}{\sqrt{q_0^2 - q^2}} = \frac{p_0}{m}\int_0^t dt'$$

Bronstein - Integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C,$$

$$a > 0, \quad C = \text{const}$$

$$\Rightarrow \quad q(t) = q_0 \sin(\omega t + \varphi); \qquad \omega = \frac{p_0}{m}, \quad \varphi \equiv \arcsin\left(\frac{q(0)}{q_0}\right)$$

(Anfangsbedingung)

$$\Rightarrow \quad p(t) = p_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Trajektorie:

$$\underline{\underline{\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} q_0 \sin(\omega t + \varphi) \\ p_0 \cos(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}}}$$

Innerhalb der Periodendauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$ wird jeder Punkt der der $(H=E)$-Hyperfläche genau einmal durchlaufen.

Damit sind die Ergoden-Hypothese (s. Vorlesung) und das Wiederkehrtheorem exakt erfüllt.

Das im Phasenraum eingeschlossene Gebiet Γ_E ist durch $H \leq E$ charakterisiert. Sein Volumen ist also der Flächeninhalt der Ellipse (hier mit Normierung $\mathcal{N}$):

$$\mathrm{Vol}(\Gamma_E) = \mathcal{N} \int_{H \leq E} dq\,dp = \mathcal{N}\pi\, q_0 p_0 = \mathcal{N}\pi \sqrt{2mE}\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = \underline{\underline{\mathcal{N}\,\frac{2\pi E}{\omega}}}$$

Volumen einer Energieschale zwischen E und $E-\varepsilon$:

$$V_\varepsilon = \mathrm{Vol}(\Gamma_E) - \mathrm{Vol}(\Gamma_{E-\varepsilon}) = \underline{\underline{\mathcal{N}\,\frac{2\pi\varepsilon}{\omega}}}$$

<u>Bem.</u>

- Der Phasenraum kann sowohl diskret als auch kontinuierlich beschaffen sein. Im diskreten Fall ist nicht klar, ob eine Energieschale überhaupt einen der Phasenraumpunkte durchläuft. Im kontinuierlichen Fall ist die Wahrscheinlichkeit für das Antreffen eines Systems mit exakter Energie E gleich Null. Daher ist es nötig, Energieschalen zu betrachten.

- In den relevanten Fällen ist der Phasenraum extrem hochdimensional, sodass der größte Teil des Volumens nahe der es begrenzenden Hyperfläche liegt. Damit ist es in guter Näherung korrekt anzunehmen, dass sämtliche Zustände innerhalb einer dünnen Schale $[E-\varepsilon, E]$ zu finden sind.

- Der harmonische Oszillator mit (kleiner) Reibung führt auf eine Ellipsengleichung mit zeitabhängigen Halbachsen; die Trajektorie ist also eine elliptische Spirale. Damit ist klar, dass dann das Phasenraumvolumen nicht mehr zeitlich konstant ist.