Sattelpunkt-Methode und Stirling-Näherung

Mit Hilfe der Sattelpunkt-Methode (auch: steepest descent, stationary phase method) lassen sich Integrale der Form

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-nf(x)}$$

näherungsweise für große n berechnen.

Annahme: $f(x)$ habe bei $x = x_0$ ein Minimum.

$\longrightarrow$ Der größte Beitrag zum Integral liegt in der Nähe von x_0.

Taylor-Entwicklung von $f(x)$:

$$f(x) = f(x_0) + \cancelto{0}{f'(x_0)}(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \mathcal{O}(x-x_0)^3$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{I} \approx e^{-nf(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-\frac{n}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2}$$

Gauß-Integral: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-\alpha(x+\beta)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \alpha > 0$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{2\pi}{nf''(x_0)}} \; e^{-nf(x_0)}}$$

Dasselbe Argument gilt für Integrale der Form $\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{nf(x)}$, wenn $f(x)$ bei x_0 ein Maximum hat; dann:

$$\mathcal{I} \approx \sqrt{\frac{2\pi}{n\,|f''(x_0)|}} \; e^{nf(x_0)}.$$

Stirling - Näherung

Wir verwenden die Sattelpunkt-Methode, um eine Näherung für $n!$ bei $n \gg 1$ zu finden.

Mit Hilfe der Gamma-Funktion,

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty dy \; y^{x-1} e^{-y} \,,$$

kann geschrieben werden

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty dy \; y^n e^{-y}$$

Substitution: $z = \frac{y}{n}$, $dy = n\,dz$

$$= n^{n+1} \int_0^\infty dz \; z^n e^{-nz} = n^{n+1} \int_0^\infty dz \; e^{n(\ln z - z)}$$

$$z^n = e^{\ln(z^n)} = e^{n \ln z}$$

Leider passt die untere Grenze noch nicht, sodass wir erneut substituieren müssen:

$$z = e^x \longrightarrow dz = e^x dx$$

$$\longrightarrow n! = n^{n+1} \int_{-\infty}^\infty dx \; e^{n(x - e^x) + x} \underset{n \gg 1}{\approx} n^{n+1} \int_{-\infty}^\infty dx \; e^{n(x - e^x)}$$

Wir brauchen also das Maximum der Funktion $f(x) = x - e^x$.

$$f'(x) = 1 - e^x \longrightarrow x_0 = 0$$

$$f''(x) = -e^x$$

$$\Rightarrow \quad n! \approx n^{n+1} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\, e^{-n} = \underline{\underline{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}}}$$

Außerdem: $\ln(n!) = \frac{1}{2}\ln(2\pi n) + n\ln(n) - n$

$\approx \underline{\underline{n\ln(n) - n}}$, da $\ln(n)$ langsamer wächst als n

<u>Bem.</u> asymptotische Analyse

Streng mathematisch definiert man zwei Funktionen $f(n)$, $g(n)$ als asymptotisch äquivalent, $f \sim g$, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 .$$

Beispiel: $f(n) = 3n^3 - 2n$, $g(n) = 3n^3$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{3n^2}\right) = 1$$

Wir interessieren uns also nur für den führenden Term von f und lassen die übrigen weg.