Beispielaufgabe: 2-dimensionales Bose-Gas

Wir betrachten ein Gas aus N Bosonen im Volumen V. Als Einteilchenenergien nehmen wir die freier quantenmechanischer Teilchen an,

$$\varepsilon(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} .$$

gesucht:
- Ausdruck für das Großkanonische Potential
- Teilchendichte
- Kondensationstemperatur

Wir wissen, dass die Zustandssumme faktorisiert,

$$Z_{\beta,\mu} = \prod_i z_i \quad ,$$

und dass für Bosonen gilt $z_i = \dfrac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}}$.

$$\longrightarrow \quad \beta J = -\ln(Z_{\beta,\mu}) = -\ln\left(\prod_i z_i\right) = -\sum_i \ln(z_i)$$

$$= -\sum_i \left[\cancelto{0}{\ln(1)} - \ln\left(1 - e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}\right)\right]$$

thermodynamischer Limes: $\displaystyle\sum_i \longrightarrow \frac{gV}{h^2}\int d^2\vec{p} \underset{\vec{p} = \hbar\vec{k} = h\vec{k}/2\pi}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{gV}{4\pi^2}\int d^2\vec{k}$

Hierbei ist $g = 2s+1$ der Entartungsgrad (s. Vorlesung).

$$\longrightarrow \quad \beta J = (2s+1)\frac{V}{4\pi^2}\int d^2\vec{k}\;\ln\left(1-e^{-\beta(\varepsilon(k)-\mu)}\right)$$

Polarkoordinaten: $d^2\vec{k} = k\,dk\,d\phi$

$$= (2s+1)\frac{V}{4\pi^2}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty dk\;k\,\ln\left(1-e^{-\beta\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m}-\mu\right)}\right)$$

Substitution: $y \equiv \beta\frac{\hbar^2k^2}{2m} \longrightarrow k\,dk = \frac{m}{\beta\hbar^2}\,dy$

$$= (2s+1)\frac{Vm}{2\pi\beta\hbar^2}\int_0^\infty dy\;\ln\left(1-e^{-y}e^{\beta\mu}\right) \quad , \quad e^{\beta\mu} \equiv z$$

partielle Integration, $\int u'v = uv - \int uv'$

mit $u' = 1$, $\quad v = \ln(1-z\,e^{-y})$

$\longrightarrow \quad u = y \quad , \quad v' = z\,\frac{e^{-y}}{1-z\,e^{-y}}$

$$= (2s+1)\frac{Vm}{2\pi\beta\hbar^2}\left[\underbrace{y\,\ln(1-z\,e^{-y})\Big|_0^\infty}_{0} - z\int_0^\infty dy\;\frac{y\,e^{-y}}{1-z\,e^{-y}}\right]$$

(z.B. aus Reihenentwicklung $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + - \ldots$)

$$= -(2s+1)\frac{Vm}{2\pi\hbar^2}\,\frac{z}{\beta}\int_0^\infty dy\;\frac{e^{-y}}{1-z\,e^{-y}}\,y$$

Vorlesung: $\quad f_k^{(\mp)} := \frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^\infty dy\;\frac{z\,e^{-y}}{1\mp z\,e^{-y}}\,y^{k-1}$

hier offenbar $k=2$ und oberes Vorzeichen

$$\Longrightarrow \quad J = -(2s+1)\frac{Vm}{2\pi\hbar^2}\;\frac{\Gamma(2)}{\beta^2}\;f_2^{(-)}$$

mittlere Teilchenzahl:

$$\langle N\rangle = -\frac{\partial J}{\partial\mu} = -\beta z\frac{\partial J}{\partial z} = (2s+1)\frac{Vm}{2\pi\hbar^2}\;\frac{\Gamma(2)}{\beta}\;z\,\partial_z f_2^{(-)}(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu} = \frac{\partial z}{\partial\mu}\;\frac{\partial}{\partial z} = \beta z\frac{\partial}{\partial z}$$

In der Übung wurde gezeigt: $z\,\partial_z f_k^{(\mp)} = f_{k-1}^{(\mp)}$.

$$= (2s+1)\frac{Vm}{2\pi\hbar^2}\;\frac{\Gamma(2)}{\beta}\;f_1^{(-)}(z)$$

, Vorlesung: $f_k^{(\mp)} = \sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^{n-1}\frac{z^n}{n^k}$

$$= (2s+1)\frac{Vm\,\Gamma(2)}{2\pi\hbar^2}\;\frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$$

Bei Kondensation muss $\mu = 0$, also $z = 1$, gelten. Aber: Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ist divergent, sodass $\langle N\rangle \to \infty$ gelten müsste!

$\Longrightarrow$ Das Bose-Gas kann im 2-dimensionalen Fall nicht kondensieren.