Beispielaufgabe: relativistisches Fermi-Gas

Bei hohen Energien können relativistische Effekte auftreten; die Einteilchenenergien lauten dann:

$$\varepsilon(p) = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} \, .$$

gesucht:
- mittlere Teilchenzahl $\langle N \rangle$
- innere Energie U

} Grenzfall $T \to 0$

In der Vorlesung wurde der allgemeine Ausdruck für die mittlere Teilchenzahl im Falle von Fermionen hergeleitet.

$$\langle N \rangle = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} \, ,$$

thermodynamischer Grenzfall

$$\sum_i \longrightarrow \frac{gV}{h^3} \int d^3\vec{p} \underset{\text{Kugelkoordinaten}}{=} \frac{gV}{h^3} \int p^2 dp \underbrace{\int d\Omega}_{4\pi}$$

$$= 4\pi \frac{gV}{h^3} \int_0^\infty dp \, \frac{p^2}{e^{\beta(\varepsilon(p) - \mu)} + 1}$$

Jetzt ein Trick! Substituiere $p \equiv mc \sinh(\alpha)$, $\alpha \geq 0$

$$\longrightarrow \varepsilon(p) = mc^2 \sqrt{\underbrace{\sinh^2(\alpha) + 1}_{\cosh^2(\alpha)}} = mc^2 \cosh(\alpha)$$

$$\longrightarrow dp = mc \cosh(\alpha) \, d\alpha$$

$$\langle N\rangle = 4\pi \frac{gV}{h^3} m^3c^3 \int_0^\infty d\alpha \, \frac{\sinh^2(\alpha)\cosh(\alpha)}{\exp(\beta mc^2\cosh\alpha - \beta\mu)+1}$$

Ganz analog folgt für die innere Energie:

$$U = \sum_i \frac{\varepsilon_i}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)}+1} = 4\pi \frac{gV}{h^3} \int_0^\infty dp \, \frac{p^2\,\varepsilon(p)}{e^{\beta(\varepsilon(p)-\mu)}+1}$$

$$= 4\pi \frac{gV}{h^3} m^4c^5 \int_0^\infty d\alpha \, \frac{\sinh^2(\alpha)\cosh^2(\alpha)}{\exp(\beta mc^2\cosh\alpha - \beta\mu)+1}$$

Grenzfall tiefer Temperaturen:

$$\frac{1}{\exp\left[\beta(mc^2\cosh\alpha - \mu)\right]+1} \xrightarrow[\beta\to\infty]{T\to 0} \begin{cases} 1 \,, & \mu > mc^2\cosh(\alpha) \\ 0 \,, & \mu < mc^2\cosh(\alpha) \end{cases}$$

Das heißt, für $T \to 0$ liefert das Integral nur Beiträge von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha_F$ mit $\mu =: mc^2\cosh(\alpha_F)$.

$$\langle N\rangle \approx 4\pi \frac{gV}{h^3} m^3c^3 \underbrace{\int_0^{\alpha_F} d\alpha \, \sinh^2(\alpha)\cosh(\alpha)}_{\frac{1}{3}\sinh^3(\alpha_F)}$$

mit $p_F \equiv p(\alpha_F) = mc\sinh(\alpha_F)$ und $g = 2s+1$

$$= \underline{\underline{(2s+1)\frac{V}{6\pi^2\hbar^3}\, p_F^3}}$$

Das ist – wie zu erwarten – das selbe Ergebnis wie nicht-relativist.

$$U \approx 4\pi \frac{gV}{h^3} m^4 c^5 \int_0^{\alpha_F} d\alpha \quad \sinh^2(\alpha) \cosh^2(\alpha)$$

<u>Nebenrechnung:</u>

$$\sinh^2(\alpha)\cosh^2(\alpha) = \frac{1}{16}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right)^2\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right)^2$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} - 2\right)\left(e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} + 2\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left(e^{2\alpha} + e^{-2\alpha}\right)^2 - 4\right] = \frac{1}{16}\left(\underbrace{e^{4\alpha} + e^{-4\alpha}}_{2\cosh(4\alpha)} - 2\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\cosh(4\alpha) - 1\right)$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\alpha_F} d\alpha \quad \sinh^2(\alpha)\cosh^2(\alpha) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sinh(4\alpha_F) - \alpha_F\right)$$

$$= (2s+1)\,\frac{V m^4 c^5}{16\pi^2 \hbar^3}\left(\frac{1}{4}\sinh(4\alpha_F) - \alpha_F\right)$$