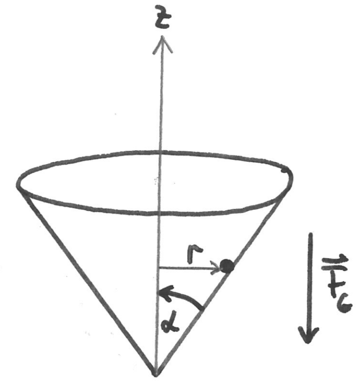
Eine Beispielaufgabe zu Lagrange I



Gegeben ein Massenpunkt m, reibungsfrei an einen Kreiskegel gebunden.

Vorüberlegung:

- Gilt Energieerhaltung?
  Ja, da die Zwangsbedingung (Bewegung auf Kegel) zeitunabhängig (skleronom) ist!
- Gilt Drehimpulserhaltung? Unklar!
  $\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times (\vec{F} + \vec{Z}) =: \vec{M} \overset{?}{=} 0$ → später zu diskutieren...

Zwangsbedingung: $r = az$ $(a \equiv \tan\alpha)$

→ $g = r - az = 0$

→ $\text{grad}\, g = \vec{e}_r - a\vec{e}_z$ (Zylinderkoordinaten r, φ, z)

Kraftbilanz:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \lambda \qquad (1)$$

$$m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0 \qquad (2)$$

$$m\ddot{z} = -mg - \lambda a \qquad (3)$$

Differenziation der ZB, um Beschleunigungen zu eliminieren,
$0 = \ddot{g} = \ddot{r} - a\ddot{z}$.

in (1): $m(a\ddot{z} - r\dot{\varphi}^2) = \lambda$

a mal (3): $ma\ddot{z} = -amg - \lambda a^2$ | −

$$-mr\dot{\varphi}^2 = \lambda + amg + \lambda a^2$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -m\frac{r\dot{\varphi}^2 + ag}{1 + a^2}$$

→ Bewegungsgleichungen:

$$(1) \qquad \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{r\dot{\varphi}^2 + ag}{1+a^2}$$

$$(2) \qquad r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0$$

$$(3) \qquad \ddot{z} = -g + \frac{r\dot{\varphi}^2 + ag}{1+a^2}\,a$$

Betrachte zunächst (2), multipliziere mit r:

$$r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} = 0$$

$$(r^2\dot{\varphi})^{\cdot} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{r^2\dot{\varphi} \equiv A} = \text{const} \qquad (*)$$

Wir haben eine Erhaltungsgröße gefunden!

Betrachte jetzt (1):

$$(1+a^2)\ddot{r} - a^2 r\dot{\varphi}^2 = -ag$$

$$\Big| (*)$$

$$(1+a^2)\ddot{r} - a^2A^2\frac{1}{r^3} \overset{!}{=} -ag \quad \Big| \cdot \dot{r}$$

, nur für $\dot{r} \neq 0$ (Spezialfall $\dot{r} = 0$ später)

$$(1+a^2)\underbrace{\dot{r}\ddot{r}}_{\frac{1}{2}(\dot{r}^2)^{\cdot}} - a^2A^2\underbrace{\frac{\dot{r}}{r^3}}_{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2}\right)^{\cdot}} = -ag\dot{r}$$

$$\xRightarrow{\int dt} \quad \underline{\frac{1}{2}(1+a^2)\dot{r}^2 + \frac{a^2A^2}{2}\frac{1}{r^2} + agr = B} = \text{const} \qquad (**)$$

Wir haben eine Bilanzgleichung gefunden!

$$\Rightarrow \text{Lösung:} \quad \underbrace{\frac{m}{2}\dot{r}^2}_{\text{kinetischer Term}} + \underbrace{\frac{ma^2A^2}{2(1+a^2)}\frac{1}{r^2} + \frac{mag}{1+a^2}r}_{U_{\text{eff}}(r)} = \underbrace{\frac{mB}{1+a^2}}_{\sim \text{Energie}}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2B}{1+a^2} - \frac{2ag}{1+a^2} r - \frac{a^2A^2}{1+a^2}\frac{1}{r^2}$$

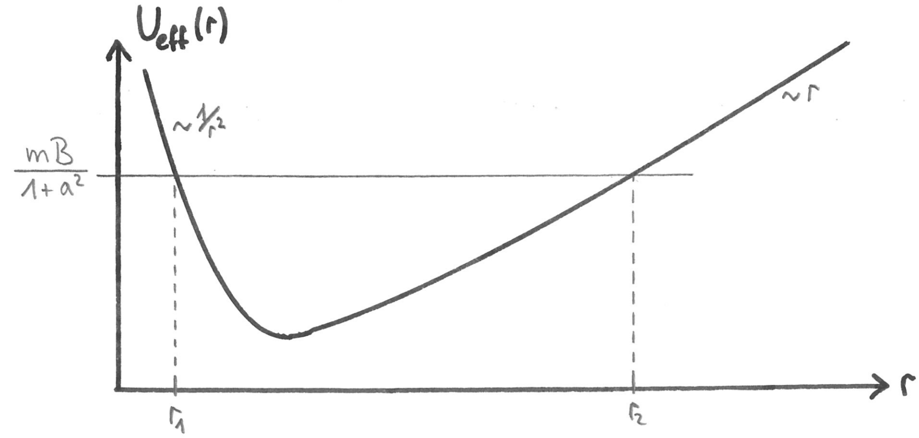
$$dt = \pm\sqrt{1+a^2}\,\frac{dr}{\sqrt{2B - 2agr - a^2A^2\frac{1}{r^2}}}$$

$$\underline{\underline{t - t_0 = \pm\sqrt{1+a^2}\int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{r'\,dr'}{\sqrt{-2agr'^3 + 2Br'^2 - a^2A^2}}}}$$ elliptisches Integral...

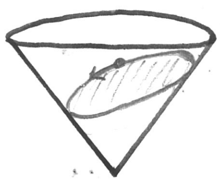
Damit ist $r(t)$ bekannt und wegen $r = az$ auch $z(t)$; mit (*) erhält man $\varphi(t)$.

Um die Bahnkurve $\varphi(r)$ zu erhalten, nutze $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{A}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$ in (**).

Diskussion anhand des Ersatzpotentials:



Die Bahnkurven sind Ellipsen.



Spezialfall $\dot{r} = 0$:

(1) : $(1+a^2)\ddot{r} - a^2 r\dot{\varphi}^2 = -a^2 A^2 \frac{1}{r^3} = -ag$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{aA^2}{g}} = \text{const} \quad , \quad z = \frac{r}{a} = \text{const}$$

Kreisbewegung auf konstanter Höhe.

(2) : $\ddot{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = Ct + D \quad ; \quad C, D$ const

Spezialfall $A = 0$:

(*) : $\dot{\varphi} = 0 \quad$ (für $r \neq 0$) $\longrightarrow \varphi = \text{const}$

$\Longrightarrow$ (1) : $\ddot{r} = -\frac{ag}{1+a^2} \longrightarrow \dot{r}(t) = -\frac{ag}{1+a^2}t + F$

Kugel rollt geradlinig, beschleunigt nach $r = 0$.

Diskussion der Erhaltungssätze

Energie : $E = T + U = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) + mgz$

$$\overset{(*) \text{ und } r = az}{=} \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{A^2}{r^2} + \frac{\dot{r}^2}{a^2}\right) + \frac{mg}{a}r$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2 E}{m} = \frac{1}{2}(1+a^2)\dot{r}^2 + \frac{a^2A^2}{2}\frac{1}{r^2} + agr \overset{(**)}{=} B$$

Die Erhaltungsgröße B ist (wie erwartet) im Wesentlichen die Energie.

Drehimpuls: Gibt es ein Drehmoment $\vec{M}$?

$$\vec{M} := \vec{r} \times (\vec{F} + \vec{Z}) = \vec{r} \times (-mg\,\vec{e}_z + \lambda \vec{e}_r - a\lambda\,\vec{e}_z)$$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z \,, \qquad \vec{e}_r \times \vec{e}_z = -\vec{e}_\varphi$$

$$= r(mg + a\lambda)\,\vec{e}_\varphi + \lambda z\,\vec{e}_\varphi = r\left(mg + \lambda\,\frac{1+a^2}{a}\right)\vec{e}_\varphi$$

$$\lambda = -m\,\frac{r\dot{\varphi}^2 + ag}{1+a^2} \overset{(*)}{=} -m\,\frac{A^2/r^3 + ag}{1+a^2}$$

$$= mr\left(g - \frac{A^2}{a}\frac{1}{r^3} - g\right)\vec{e}_\varphi = \underline{-\frac{mA^2}{a}\frac{1}{r^2}\,\vec{e}_\varphi}$$

$\Rightarrow$ Für $A \neq 0$ gibt es ein Drehmoment (zeitabhängig wegen $r(t)$); der Drehimpuls ist also nicht erhalten, $\frac{d}{dt}\vec{L} \neq 0$.

Berechne $\vec{L}$:

$$\vec{L} := \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m(r\vec{e}_r + z\vec{e}_z) \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{e}_z)$$

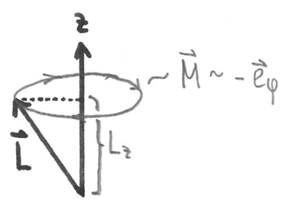
$$\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z \,, \qquad \vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_r$$

$$= mr^2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \underbrace{\cancel{(mz\dot{r} - mr\dot{z})}}_{0,\ r=az}\,\vec{e}_\varphi - \underbrace{mzr\dot{\varphi}}_{=\frac{m}{a}r^2\dot{\varphi}}\,\vec{e}_r$$

$$\overset{(*)}{=} \underline{mA\,\vec{e}_z - \frac{mA}{a}\,\vec{e}_r}$$

Die Erhaltungsgröße A ist im Wesentlichen die z-Komponente des Drehimpulses; L_z ist erhalten!

Beachte: Die Richtung von $\vec{L}$ ist wegen $\vec{e}_r(t)$ nicht konstant, nur der Betrag. $\vec{L}$ rotiert infolge des Drehmomentes um die z-Achse.



Was ist bei Kreisbewegung $r = \text{const}$, $z = \text{const}$?!
Hier würde man erwarten, dass $\vec{L}$ nur eine z-Komponente hat...

→ <u>Achtung:</u> Die Form von $\vec{L}$ ist abhängig vom gewählten Koordinatensystem!

Setze bei Kreisbewegung den Ursprung in die Bewegungsebene (Transformation $z \mapsto z - z_0$), sodass $z = 0 = \text{const}$. Dann verschwindet der $\vec{e}_r$ - Anteil, $\vec{L} = L_z \vec{e}_z$. Dann ist $\vec{L}$ erhalten.