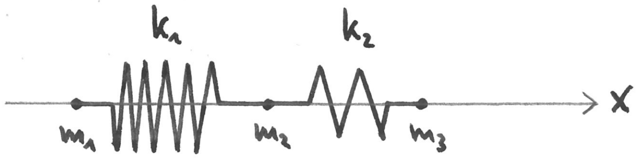
Matrix - Formalismus für gekoppelte Schwingungen

→ Was ist mit mehr als zwei gekoppelten Schwingern?

→ Was ist bei ungleichen Massen?

Betrachten 3 Massenpunkte:



Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{x}_1 = (x_2 - x_1) k_1$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = (x_1 - x_2) k_1 + (x_3 - x_2) k_2$$
$$m_3 \ddot{x}_3 = (x_2 - x_3) k_2$$

Möglichkeit: Exponential-Ansatz für synchrone Schwingungen,
$x_j \sim e^{\pm i\omega t}$ → Lösungen für ω suchen

systematische Herangehensweise:

$$\ddot{\vec{x}} \equiv \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} k_1/m_1 & -k_1/m_1 & 0 \\ -k_1/m_2 & (k_1+k_2)/m_2 & -k_2/m_2 \\ 0 & -k_2/m_3 & k_2/m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \equiv -A\vec{x}$$

Ziel ist es jetzt, die Koeffizientenmatrix A zu diagonalisieren, d.h. eine Koordinatentransformation (Matrix C) zu finden, sodass $\Omega \equiv C^{-1}AC$ nur noch Einträge auf der Diagonalen hat. Damit ist das Gleichungssystem entkoppelt.

Multiplikation mit C^{-1}:

$$C^{-1}\ddot{\vec{x}} = -C^{-1}A\vec{x} = -C^{-1}A\overbrace{CC^{-1}}^{1}\vec{x} \quad \rightarrow \quad \ddot{\vec{\eta}} = -\Omega\vec{\eta} \; ;$$

in $\vec{\eta} \equiv C^{-1}\vec{x}$ stehen die neuen Koordinaten.

Diagonalisierungsverfahren (s. lin. Algebra!):

C ist gegeben als Matrix aus Eigenvektoren von A,

$$C = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{e}_{\lambda_1} & \vec{e}_{\lambda_2} & \vec{e}_{\lambda_3} \\ | & | & | \end{pmatrix},$$ wobei $\vec{e}_{\lambda_j}$ den EV zum Eigenwert λ_j bezeichnet.

In Ω stehen gerade die EW von A,

$$\Omega = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

→ Suche EW mittels $\det(\lambda_j \mathbb{1} - A) \overset{!}{=} 0$ und bestimme EV aus $(A - \lambda_j \mathbb{1})\vec{e}_{\lambda_j} = 0 \ldots$

⇒ Dann sind C und Ω bekannt, sodass für $\vec{\eta}$ gelöst werden kann (Exponential-Ansatz) und man mit $\vec{x} = C\vec{\eta}$ die Lösungen für die x_j erhält.

Man nennt $\omega_j \equiv \sqrt{\lambda_j}$ die Eigenfrequenzen des Systems; Normalschwingungen sind harmonische Schwingungen mit Frequenzen ω_j.

Die Erweiterung auf n gekoppelte Schwinger ist straightforward.