Einige Gedanken zu Phasenräumen, u.s.w.

Der Konfigurationsraum reicht nicht aus, um die Zeitentwicklung eines physikalischen Systems vollständig zu beschreiben. Die Lagrange-Funktion ist ja auch von den generalisierten Geschwindigkeiten abhängig.
→ brauchen Information über Geschwindigkeiten / Impulse

$$\text{Phasenraum} = \underbrace{\text{Konfigurationsraum}}_{\text{Koordinaten } q_k} \oplus \underbrace{\text{Impulsraum}}_{\text{Impulse } p_k}$$

für ein freies System aus N Teilchen: 6N-dimensional
(sonst: Minus Anzahl Freiheitsgrade)

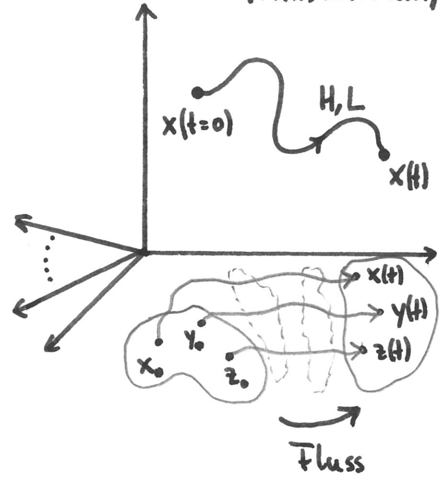
Durch einen Punkt im Phasenraum ist jedes physik. System <u>vollständig</u> charakterisiert (für alle Zeiten).

- Durch jeden Punkt läuft genau eine Trajektorie; Trajektorien dürfen sich nicht kreuzen.
- Orbits (geschlossene Kurven) beschreiben oszillierende Systeme.
- Die Trajektorien / Orbits sind durch die Lagrange- bzw. Hamiltonfunktion bestimmt.

Koordinaten im Phasenraum:

$$x = \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}$$

(Phasenraum)



Mit den Hamilton'schen Bewegungsgleichungen $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$, $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$, folgt

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial H / \partial p \\ -\partial H / \partial q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_f \\ -\mathbb{1}_f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial H / \partial q \\ \partial H / \partial p \end{pmatrix} = J \operatorname{grad}_x H \,.$$

(Matrizen J dieser Form heißen „symplektisch"; man spricht von einer symplektischen Struktur des Phasenraums.)

Übergang zwischen verschiedenen Sätzen an Variablen bzw. Repräsentationen des Phasenraums:

$$\begin{tikzcd}
(t, q_k, \dot{q}_k) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{„Legendre-Transformation“}"'] \arrow[d, dash] & (t, q_k, p_k) \arrow[d, dash] \\
\begin{array}{l}\text{Lagrange-} \\ \text{Funktion } L, \\ \text{Lagrange-Gleichungen}\end{array} & \begin{array}{l}\text{Hamilton-} \\ \text{Funktion } H, \\ \text{Hamilton-Gleichungen}\end{array}
\end{tikzcd}$$

q_k und p_k heißen „zueinander konjugierte" Variablen.

Beachte:

- p_k ist nicht immer der kinetische Impuls, $p_k \neq m\dot{q}_k$.
- Der Begriff „Phasenraum" hat nichts zu tun mit Phasen von Schwingungen (Phasenfronten von Wellen, o.ä.) oder Phasen(-übergängen) in der Thermodynamik.