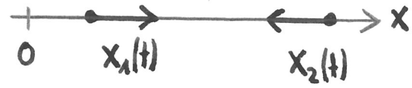
Eine ausführliche Beispielaufgabe

Aufgabe: Zwei Regentropfen fallen im homogenen Schwerefeld der Erde. Wie viel Zeit vergeht, bis sie sich aufgrund ihrer gravitativen Anziehung vereinigen?

Variante 1: zwei Massenpunkte m_1, m_2 mit Koordinaten x_1, x_2;
o. B. d. A. $x_2 \geq x_1$



$$\left.\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= G \frac{m_1 m_2}{(x_2-x_1)^2} \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -G \frac{m_1 m_2}{(x_2-x_1)^2} \end{aligned}\right\} \text{ gekoppelte Differentialgleichungen}$$

Addition: $m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0$

$$\Rightarrow \ddot{x}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \ddot{x}_1 \longrightarrow \dot{x}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \dot{x}_1 + A \longrightarrow x_2(t) = -\frac{m_1}{m_2} x_1(t) + At + B \quad (*)$$

Funktioniert Lösung mittels Quadratur?

Erinnerung: $dt = \frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}}$, wobei U nicht explizit zeitabhängig sein darf – wäre es hier aber wegen $(*)$:

$$U = G \frac{m_1 m_2}{x_2 - x_1} = G \frac{m_1 m_2}{-(1+\frac{m_1}{m_2})x_1 + At + B}$$

Erinnerung: In der Herleitung brauchten wir $\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} \frac{dx}{dt}$, was nicht für $U(x,t)$ funktioniert, da $\frac{dU(x,t)}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t}$.

Die Integration lässt sich also so nicht ausführen.

Bem: Implizite Zeitabhängigkeit ist im Allgemeinen gegeben, $U(x(t))$.

Interne Wechselwirkungen sollten nur von Relativkoordinaten abhängen; außerdem sagt $(*)$, dass eine Koordinate ausreicht.

$\rightarrow$ Entkopplung mittels $\quad r(t) := x_2(t) - x_1(t)$

$$\Rightarrow \quad m_1 \ddot{x}_1 = m_1(\ddot{x}_2 - \ddot{r}) = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \Big|\, : m_1$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \Big|\, : m_2$$

$$\Big|\, -$$

$$\ddot{r} = -\frac{G}{r^2}(m_1 + m_2)$$

Damit ist das Problem auf eine Variable reduziert und Integration klappt:

$$\ddot{r}\dot{r} = -G(m_1+m_2)\frac{\dot{r}}{r^2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{r}^2) = G(m_1+m_2)\frac{d}{dt}\frac{1}{r}$$

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = G\frac{m_1+m_2}{r} + \tilde{E}\,, \qquad \tilde{E} = \text{const} \xrightarrow[\text{geschw. } \dot{r}(r=r_0) \overset{!}{=} 0]{\text{verschwindende Anfangs-}} \tilde{E} = -G\frac{m_1+m_2}{r_0}$$

$$\Rightarrow \quad t - \cancel{t_0}^{\overset{!}{=}0} = -\int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{\sqrt{2\left(G\frac{m_1+m_2}{r'} + \tilde{E}\right)}}\,,$$

Minus wegen $dr < 0$ für $dt > 0$

Ziel $r = 0$:

$$t = \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2G(m_1+m_2)}}\int_{r_0}^{0}\frac{dr'}{\sqrt{1/r' - 1/r_0}} = \frac{r_0\sqrt{r_0}}{\sqrt{2G(m_1+m_2)}}\int_{1}^{\infty}\frac{du}{u^2\sqrt{u-1}}}_{u \equiv \frac{r_0}{r'}\,,\quad dr' = -r_0\frac{du}{u^2}\,,\quad u(r'=r_0)=1\,,\quad u(r'=0)=\infty}$$

Das ist „Bronstein-integrabel" via

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)b\, x^{n-1}} - \frac{(2n-3)a}{(2n-2)b}\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}}$$

und $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{\sqrt{-b}}\arctan\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}$ für $b<0$,

hier: $n=2$, $a=1$, $b=-1$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{\sqrt{r_0^3}}{\sqrt{2G(m_1+m_2)}}\left(\frac{\sqrt{u-1}}{u} + \arctan\sqrt{u-1}\right)\Bigg|_1^\infty = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r_0^3}{2G(m_1+m_2)}}}}$$

<u>Variante 2:</u> Betrachtung im Schwerpunktsystem

Allg. Definition des Schwerpunktes: $\vec{R} := \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$,

hier: $X := \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$

$$\Rightarrow \ddot{X} = \frac{m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2}{m_1+m_2} = \frac{1}{m_1+m_2}\left(G\frac{m_1m_2}{(x_2-x_1)^2} - G\frac{m_1m_2}{(x_2-x_1)^2}\right) = 0$$

→ Keine Beschleunigung des Schwerpunktes (freie Bewegung); das Schwerpunktsystem ist ein Inertialsystem.

Nennen wir nun die Koordinaten im Schwerpunktsystem x_1' und x_2'. Wir müssen die Koordinatentransformation $(x_1, x_2) \mapsto (x_1', x_2')$ nicht explizit hinschreiben.

Die definierende Bedingung ist, dass der Schwerpunkt im Schwerpunktsystem ruht:

$$0 = \dot{X}' = \frac{m_1\dot{x}_1' + m_2\dot{x}_2'}{m_1+m_2} \quad\Rightarrow\quad \dot{x}_2' = -\frac{m_1}{m_2}\dot{x}_1',$$

die Summe aller Impulse ist Null.

Das ist dasselbe wie (*) für $A \equiv 0$.

In diesem einfachen Fall gibt es keine wirkliche Erleichterung durch den Übergang zum SP-System. Man geht genauso vor wie in Variante 1, mit $r := x_2' - x_1'$:

$$\ddot{r} = -\frac{G}{r^2}(m_1 + m_2) .$$

Mit der <u>reduzierten Masse</u> $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ und der Gesamtmasse $M \equiv m_1 + m_2$ kann man schreiben:

$$\mu \ddot{r} = -G \frac{\mu M}{r^2} .$$

Das heißt: Reduktion auf einen (gedachten) Massenpunkt der Masse μ, der sich im Gravitationspotential einer unbewegten Masse M bewegt!

Die Bilanzgleichung von vorhin lautet :

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = G \frac{m_1 + m_2}{r} + \tilde{E} \quad \Big| \cdot \mu$$

$$\frac{\mu}{2} \dot{r}^2 = G \frac{\mu M}{r} + E \qquad \text{mit } E \equiv \mu \tilde{E} .$$

$\Rightarrow$ Energieerhaltung!

<u>Variante 3:</u> Energieansatz

Bilanz: $$E = T + U = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 - G \frac{m_1 m_2}{x_2 - x_1} , \qquad x_2 > x_1$$

wie zuvor: $r := x_2 - x_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2^2 = (\dot{r} + \dot{x}_1)^2 ,$

$$\dot{x}_2 = \dot{r} + \dot{x}_1$$

$$\rightarrow \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{r}+\dot{x}_1)^2 - G\frac{m_1 m_2}{r} = E$$

Sollen x_1, x_2 die Koordinaten im Schwerpunktsystem sein, so muss außerdem $\sum \vec{p}_i = 0$, also $m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = 0$, gelten.

$$\rightarrow m_1\dot{x}_1 + m_2(\dot{r}+\dot{x}_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{r}$$

$$\Rightarrow T = \frac{m_1}{2}\frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\dot{r}^2 + \frac{m_2}{2}\left(1-\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2\dot{r}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{m_1 m_2^2 + m_2^3}{(m_1+m_2)^2} + m_2 - \frac{2m_2^2}{m_1+m_2}\right]\dot{r}^2$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2^2 + \cancel{m_2^3} + m_1^2 m_2 + \cancel{m_2^3} + \cancel{2m_1 m_2^2} - \cancel{2m_1 m_2^2} - \cancel{2m_2^3}}{(m_1+m_2)^2}\,\dot{r}^2$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2 \cancel{(m_1+m_2)}}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}}\,\dot{r}^2 \underset{\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}}{=} \frac{\mu}{2}\dot{r}^2$$

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{x_2 - x_1} = -G\frac{m_1 m_2}{r}\cdot\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2} \overset{M \equiv m_1+m_2}{=} -G\frac{\mu M}{r}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 - G\frac{\mu M}{r} \qquad \longrightarrow \text{Integration wie zuvor...}$$