Beispiel zu Lagrange II

Wir rechnen ein schwarzes Loch in der Raumzeit (Koordinaten (t, r, φ)) in der Bewegungsebene ($\vartheta = \frac{\pi}{2} = \text{const}$, unterdrückt) eines Teilchens.
Es sei τ die „Eigenzeit" des betrachteten Massenpunktes ($m=1$), der sich in der Raumzeit des schwarzen Loches bewegt.
Es übernimmt τ die Rolle des freien Parameters (der bisher t war).
Ein Punkt bedeutet Ableitung nach τ.

Lagrange-Funktion (aus Allg. Relativitätstheorie):

$$L = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + r^2 \dot{\varphi}^2$$

zyklische Koordinaten:

t: hier nicht betrachtet...

φ: $\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ erhalten, $\quad 2r^2\dot{\varphi} \equiv P = \text{const} \quad (*)$

Wir brauchen noch die Normierung $L = -c^2$ (folgt aus ART),

damit: $$c^2 \dot{t}^2 = \frac{c^2}{1 - \frac{r_s}{r}} + \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} + \frac{r^2\dot{\varphi}^2}{1 - \frac{r_s}{r}} . \quad (**)$$

Bestimmen Lagrange-Gleichung für r:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{2\dot{r}}{1 - \frac{r_s}{r}} \longrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 2\, \frac{\ddot{r}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) - \dot{r}^2 \frac{r_s}{r^2}}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -\frac{r_s}{r^2} c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} \frac{r_s}{r^2} + 2r\dot{\varphi}^2$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} - \frac{\partial L}{\partial r} = \frac{2\ddot r}{1-\frac{r_s}{r}} - \cancel{\frac{2\dot r^2 r_s}{r^2\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2}} + \frac{r_s}{r^2}\left[\frac{c^2}{1-\frac{r_s}{r}} + \cancel{\frac{\dot r^2}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2}} + \frac{r^2\dot\varphi^2}{1-\frac{r_s}{r}}\right] + \cancel{\frac{\dot r^2}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^2}\frac{r_s}{r^2}} - 2r\dot\varphi^2$$

(**)

$$= \frac{2\ddot r}{1-\frac{r_s}{r}} + \dot\varphi^2\left(\frac{r_s}{1-\frac{r_s}{r}} - 2r\right) + \frac{r_s c^2}{r^2\left(1-\frac{r_s}{r}\right)}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{2\ddot r}{1-\frac{r_s}{r}} + \frac{P^2}{4r^4}\left(\frac{r_s}{1-\frac{r_s}{r}} - 2r\right) + \frac{r_s c^2}{r^2\left(1-\frac{r_s}{r}\right)} = 0$$

$$0 = 2\ddot r + \frac{P^2 r_s}{4}\frac{1}{r^4} - \frac{P^2}{2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\frac{1}{r^3} + r_s c^2\frac{1}{r^2} \qquad \Big| \cdot \dot r$$

$$0 = 2\dot r\ddot r + \frac{3P^2 r_s}{4}\frac{\dot r}{r^4} - \frac{P^2}{2}\frac{\dot r}{r^3} + r_s c^2\frac{\dot r}{r^2}$$

$$= \left(\dot r^2\right)^{\cdot} - \frac{P^2 r_s}{4}\left(\frac{1}{r^3}\right)^{\cdot} + \frac{P^2}{4}\left(\frac{1}{r^2}\right)^{\cdot} - r_s c^2\left(\frac{1}{r}\right)^{\cdot} \qquad \Big| \int dt$$

$$\underline{E = \dot r^2 - \frac{P^2 r_s}{4}\frac{1}{r^3} + \frac{P^2}{4}\frac{1}{r^2} - r_s c^2\frac{1}{r}} \equiv \dot r^2 + U_{eff}(r)$$

Nullstellen von $\frac{dU_{eff}}{dr}$: $\quad r_{1/2} = \frac{1}{4}\frac{P^2}{r_s c^2} \pm \sqrt{\frac{1}{16}\frac{P^4}{r_s^2 c^4} - \frac{3}{4}\frac{P^2}{c^2}}$,

Vorzeichenwechsel unter der Wurzel bei $P_{krit} = \sqrt{12}\, r_s c$, d.h.

$P > P_{krit}$: 2 Extrema

$P = P_{krit}$: 1 Extremum

$P < P_{krit}$: kein Extremum

Übung: Zeige, dass die Lagrange-Gl. für t zu demselben Ergebnis führt!